Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Dr. Sabine Kuske
Studiengang Informatik
Linzer Str. 9a
OAS 3001, 3005
Tel.: 2956, 2335, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
{kreo,kuske}@informatik.uni-bremen.de
www.informatik.uni-bremen.de/theorie

25. Mai 2010
Aufgaben 4

Theoretische Informatik 2

4. Übungsblatt

In den folgenden Aufgaben wird vorausgesetzt, dass natürliche Zahlen nicht unär dargestellt werden, sondern als Dezimalzahlen (oder altenativ als Binärzahlen).

1. Das *Rucksack*-Problem ist wie das Erfüllbarkeitsproblem *NP*-vollständig und erhält als Eingaben eine Sequenz $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}^*$ mit $a_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, n$ und ein $k \in \mathbb{N}$. Die Ausgabe ist genau dann T, wenn eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass gilt:
$$\sum_{i \in I} a_i = k.$$
Betrachte das Problem *MaxMin* mit den folgenden Eingaben:
   - $b_1 \dots b_n, c_1 \dots c_n \in \mathbb{N}^*$ mit $b_i, c_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, n$,
   - $Max, Min \in \mathbb{N}$.

   Die Ausgabe von *MaxMin* ist genau dann T, wenn eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass
$$\sum_{i \in I} b_i \leq Max \text{ und } \sum_{i \in I} c_i \geq Min.$$
Zeige, dass *MaxMin* *NP*-vollständig ist, d.h.:
   (a) Zeige zuerst, dass *MaxMin* in *NP* liegt. (Hinweis: Dafür genügt es zu zeigen, dass mit einem deterministischen polynomiellen Algorithmus getestet werden kann, ob eine gegebene Menge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ die obige Bedingung erfüllt, d.h. $\sum_{i \in I} b_i \leq Max$ und $\sum_{i \in I} c_i \geq Min$.) (10%)
   (b) Übersetze jede Eingabe $w \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ von *Rucksack* in eine Eingabe $red(w) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von *MaxMin*, so dass die Übersetzung polynomiellen Zeitaufwand hat und folgende Korrektheitsaussage gilt:
$$\mathit{Rucksack}(a_1 \dots a_n, k) = T \text{ gdw. } \mathit{MaxMin}(red(a_1 \dots a_n, k)) = T.$$
Begründe, warum deine Übersetzung polynomiellen Zeitaufwand hat und beweise, dass sie die Korrektheitsaussage erfüllt. (20%)

2. Betrachte das *gewichtete Summenproblem GSP* mit den Eingaben $d_1 \dots d_m \in \mathbb{N}^*$ mit $d_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, m$ und $k \in \mathbb{N}$. Die Ausgabe von *GSP* ist genau dann

T, wenn eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und eine Abbildung $weight\colon I \to \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\sum_{i \in I} weight(i) * d_i = k.$$

Übersetze jede Eingabe $w \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ von GSP in eine Eingabe $red(w) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ von *Rucksack*, so dass folgende Korrektheitsaussage gilt:

$$GSP(d_1 \ldots d_n, k) = T \text{ gdw. } Rucksack(red(d_1 \ldots d_n, k)) = T.$$

Beweise, dass deine Übersetzung die Korrektheitsaussage erfüllt. (20%)

3. Die Twinshuffle-Sprache TS über dem Alphabet $A = \{0, 1, \overline{0}, \overline{1}\}$ ist definiert durch $TS = \{w \in A^* \mid read_{01}(w) = read_{\overline{01}}(w)\}$, wobei für alle $w \in A^*$ und alle $x \in \{0, 1\}$

   $read_{01}(\lambda) = \lambda, read_{01}(xw) = x\,read_{01}(w), read_{01}(\overline{x}w) = read_{01}(w),$
   $read_{\overline{01}}(\lambda) = \lambda, read_{\overline{01}}(xw) = read_{\overline{01}}(w)$ und $read_{\overline{01}}(\overline{x}w) = x\,read_{\overline{01}}(w).$

   Entwirf eine Grammatik für die Sprache TS. (20%)

4. Für eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ heißt eine Regel $(A ::= w) \in P$ *wohlgeformt*, falls $w \in T$ oder $w \in N^*$ mit $length(w) \geq 2$.

   (a) Entwirf ein Verfahren, das aus einer beliebigen kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik G' mit ausschließlich wohlgeformten Regeln erzeugt, derart dass $L(G') = L(G)$. Dabei kann angenommen werden, dass G keine λ-Produktionen und keine Kettenregeln enthält. (20%)

   (b) Veranschauliche deine Konstruktion an der Beispielgrammatik $(\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Regeln $S ::= Ab \mid Ba$, $A ::= AbA \mid aS \mid a$, $B ::= BBa \mid b \mid ASA$. (10%)

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Woche vom 07.06.2010 in den Tutorien abzugeben.