Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski 13.11. 2006

Syntaktische Methoden der Bilderzeugung (WS 2006/2007)

1. Übungsblatt (Kettencode-Bildsprachen)

Wenn man den Punkt $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ um den Nullpunkt um 90° gegen den Uhrzeigersinn dreht, erhält man den Punkt $turn(x, y) = (-y, x)$. Das lässt sich auf Bilder und Bildmengen fortsetzen, indem alle vorkommenden Punkte gedreht werden:

- $turn(\{(x, y), (x', y')\}) = \{turn(x, y), turn(x', y')\}$ für alle Linien,
- $turn(p) = \{turn(l) \mid l \in p\}$ für alle Bilder,
- $turn(d) = (turn(p), \bullet, turn(e))$ für alle gezeichneten Bilder $d = (p, \bullet, e)$,
- $turn(D) = \{turn(d) \mid d \in D\}$ für alle Sprachen gezeichneter Bilder D.

Sei D eine Sprache gezeichneter Bilder und $L \subseteq COMPASS^*$ mit

$$drawing(L) = \{drawing(v) \mid v \in L\} = D.$$

Betrachte außerdem die Abbildung $t : COMPASS \to COMPASS$ mit $t(n) = w, t(o) = n, t(s) = o, t(w) = s$. Diese Abbildung lässt sich auf Wörter und Wortsprachen fortsetzen:

- $t^*: COMPASS^* \to COMPASS^*$ mit $t^*(\lambda) = \lambda$ und $t^*(ur) = t^*(u)t(r)$ für alle $u \in COMPASS^*$ und $r \in COMPASS$,
- $t^*(L) = \{t^*(u) \mid u \in L\}$ für alle $L \subseteq COMPASS^*$.

Dann gilt für alle $u \in COMPASS^*$:

(A) $e(t^*(u)) = turn(e(u))$,

(B) $p(t^*(u)) = turn(p(u))$,

(C) $drawing(t^*(u)) = turn(drawing(u))$.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften folgt:

(D) $drawing(t^*(L)) = turn(D)$.

Das bedeutet, dass sich die gezeichneten Bilder in D drehen lassen, indem man die Bildbeschreibungen mit t^* transformiert und dann zeichnet.

Zu diesen Überlegungen sind folgende Aufgaben zu bearbeiten:

1. Beweise die Eigenschaft A mit vollständiger Induktion über den rekursiven Aufbau von Wörtern.
2. Beweise die Eigenschaft B analog.
3. Beweise die Eigenschaft C mit Hilfe von A und B (ohne Induktion).
4. Beweise das Hauptergebnis D mit Hilfe der Eigenschaft C.

Dabei sind die Beweisschritte kurz zu begründen. Der Induktionsschluss in Aufgabe 1 für *ur* kann auf eine spezielle Richtung beschränkt werden. Für die anderen drei Richtungen kann dann einfach „Beweis analog“ gesagt werden.

5. Ersetze in den vorausgegangenen Überlegungen *turn* durch die Spiegelung *mirror* an der $y-$Achse. Durch welche Abbildung $m\colon COMPASS \to COMPASS$ muss man t ersetzen, damit

$$drawing(m^*(L)) = mirror(D)$$

   gilt.

6. Begründe, dass $turn(D)$ und $mirror(D)$ reguläre Bildsprachen sind, wenn D regulär ist.
7. Begründe, dass *turn* und *mirror* auch Kontextfreiheit und Kontextsensitivität bewahren.

Abgabe bitte bis 28.11.2006.