

## Syntaktische Methoden der Bilderzeugung (WS 2006/2007)

### 3. Übungsblatt (Collagen-Grammatiken)

Betrachte die propere Collagen-Grammatik *CARPET* mit den beiden Regeln  $SC ::= Square \mid Pattern$  und der Startcollage  $(SC, pin_{SC})$ . Dabei ist die Pinnpunktsequenz von  $SC$  gegeben durch  $pin_{SC} = (0, 0)(3, 0)(3, 3)(0, 3)$ . *Square* ist eine terminale Collage mit einem Teil, das durch die von den Pinnpunkten aufgespannte Quadratfläche (mit Rand) bestimmt ist. *Pattern* ist eine Collage ohne Teile mit den acht Hyperkanten  $e_1, \dots, e_8$ , die alle mit  $SC$  markiert sind. Ihre Anheftpunkte sind durch affine Transformation der Pinnpunkte definiert:  $att_{CARPET}(e_i) = a_i(pin_{SC})$  für  $i = 1, \dots, 8$  mit  $a_i(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + (x_i, y_i)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , wobei  $x_1 = x_7 = x_8 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ,  $x_2 = x_6 = y_4 = y_8 = 1$  und  $x_3 = x_4 = x_5 = y_5 = y_6 = y_7 = 2$  gilt.

1. Zeige, dass  $(3, 3) \in pict(C)$  für alle  $C \in L(CARPET)$ .
2. Zeige, dass  $(\frac{1}{3^k}, \frac{1}{3^k}) \in pict(C)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $C \in L(CARPET)$ .
3. Zeige, dass es eine Folge  $C_n \in L(CARPET)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt, bei denen die zugehörigen Bilder  $pict(C_n)$  die Fläche

$$area(C_0) = 9 \quad \text{und} \quad area(C_{n+1}) = 9 - \sum_{i=0}^n \left(\frac{8}{9}\right)^i$$

besitzen.

Dabei ist  $pict(C)$  die Vereinigung aller Teile von  $C$ . Es wird empfohlen, die Aufgaben mit Hilfe des Kontextfreiheitslemmas zu lösen.

Betrachte schließlich die propere Collagen-Grammatik *GOLDEN* mit der Regel  $GM ::= Quarter$ . Dabei ist die Pinnpunktsequenz von  $GM$  gegeben

als  $(0,0)(1,0)(1,1)(0,1)$ . *Quarter* hat zwei Teile. Das eine Teil ist der Rand des von den Pinnpunkten aufgespannten Quadrats; das andere ist der Viertelkreis um Pinnpunkt 3 mit Radius 1 zwischen den Pinnpunkten 2 und 4. *Quarter* hat außerdem eine Hyperkante  $e_0$  mit den Anheftpunkten  $a_0(pin_{GM})$ , wobei die affine Transformation  $a_0$  definiert ist durch

$$a_0(x, y) = psi(-y, x) + (1 + psi, 0)$$

mit  $psi = \frac{1}{phi}$  und  $phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , was ungefähr 1,61803399 ist.

4. Zeichne die Ableitung zu dieser Grammatik, die in  $(GM, pin_{GM})^\bullet$  beginnt, mit vier oder fünf Schritten.

Hinweis: Der vierte Anheftpunkt ist der zweite Pinnpunkt. Und der erste Anheftpunkt entsteht so: Nimm die Strecke vom Mittelpunkt  $X$  zwischen Pinnpunkt 1 und 2 zum Pinnpunkt 3 als Radius eines Kreises um  $X$ ; wo der Kreis die  $x$ -Achse schneidet, ist der erste Anheftpunkt.

Abgabe bitte bis 6. Februar 2007.