Syntaktische Methoden der Bilderzeugung

Hans-Jörg Kreowski

WS 2006/2007

die folgenden Folien gehören zum Thema **Collagen-Grammatiken**:

Collagen

Hyperkantenersetzung

Collagen-Grammatik und erzeugte Sprache

Kontextfreiheitslemma

diverse Beispiele

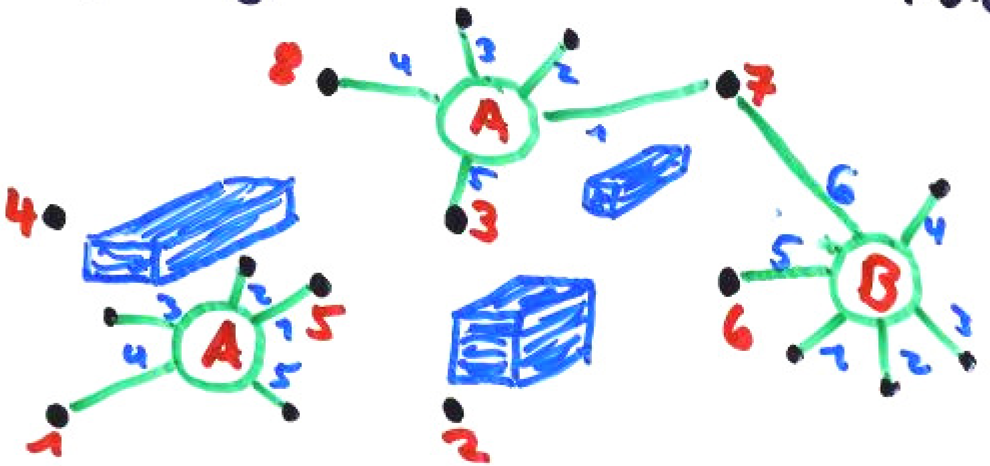
Collagen

- $(\text{PART}, \text{pin})$ with $\text{PART} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\text{pin} \in (\mathbb{R}^d)^*$

- Teile sind Punktmengen wie
  ⁘ / ~ △ □ ○ ▲ ▬ ● ....
- Pinnpunkte bilden Sequenz

- $C = (\underbrace{\text{PART}, E}_{\text{Menge von Hyperkanten}}, \underbrace{att: E \to (\mathbb{R}^d)^*}_{\text{Anheftsequenz pro Hyperkante}}, \underbrace{lab: E \to N}_{\text{Markierung}}, \text{pin})$

  N: Menge von Nonterminals



Hyperkanten löschen & Collagen hinzufügen

- $C - B = (PART_C, E_C - B, att_C|_{E_C - B}, lab_C|_{E_C - B}, pin_C)$

  für $B \subseteq E_C$

- $C + C' = (PART_C \cup PART_{C'}, E_C + E_{C'}, att, lab, pin_C)$

  $+$: disjunkte Vereinigung

  pin_C: Pinnpunkte vom ersten Summanden

mit $att(e) = \begin{cases} att_C(e) & \text{für } e \in E_C \\ att_{C'}(e) & \text{für } e \in E_{C'} \end{cases}$

und $lab(e) = \begin{cases} lab_C(e) & \text{für } e \in E_C \\ lab_{C'}(e) & \text{für } e \in E_{C'} \end{cases}$

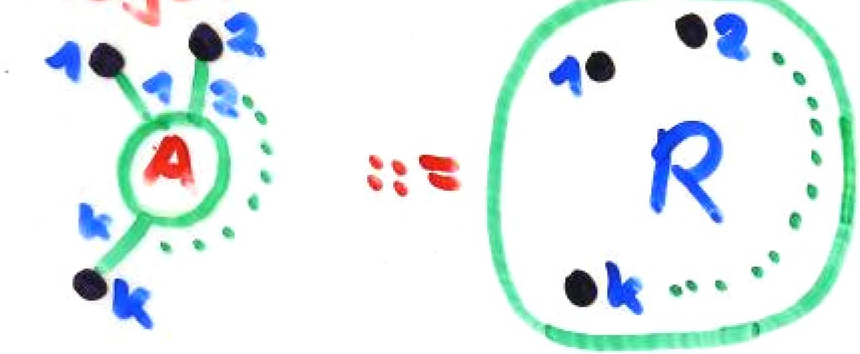
Hyperkantenersetzung

- wähle $B \subseteq E_C$
- wähle $\mathit{repl}: B \to \mathcal{C}(N)$, so dass für jedes $e \in B$ (eindeutig) affine Transformation $a(e): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ existiert mit $a(e)(\mathit{pin}_{\mathit{repl}(e)}) = \mathit{att}_C(e)$

  alle Collagen
- lösche B und
- füge $a(e)(\mathit{repl}(e))$ hinzu für alle $e \in B$

$$\Rightarrow \quad C[\mathit{repl}] = (C - B) + \sum_{e \in B} a(e)(\mathit{repl}(e))$$

Regel



kurz: $A ::= R$

Anwendung einer Regel auf eine Collage C

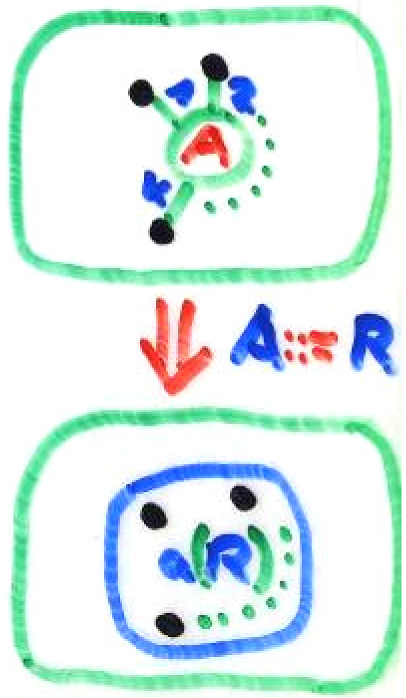
(i) wähle Hyperkante $e \in E_C$

(ii) wähle Regel $A ::= R$ mit $lab_C(e) = A$

(iii) wähle affine Transformation
$a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $att_C(e) = a(pin_R)$

(iv) Lösche e

(v) füge $a(R)$ hinzu



beachte:

- $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ affine Transformation gdw $d \times d$-Matrix A und d-Vektor b existieren mit $a(x) = Ax + b$ f.a. $x \in \mathbb{R}^d$

- die Bedingung $a(pin_R) = att_c(e)$ bildet also lin. Gleichungssystem mit $d(d+1)$ Unbek.

- bei $d+1$ Pinnpunkten $P_0, \ldots, P_d$ Lösung eindeutig gdw.
  $P_1 - P_0, \ldots, P_d - P_0$ linear unabhängig

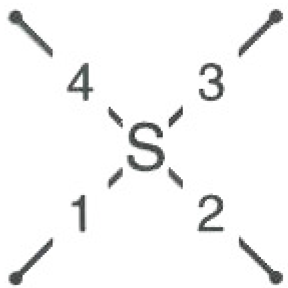
Collagen-Grammatik

$$G = (\underbrace{N}_{\text{nichtterminale Markierung}}, \underbrace{P}_{\text{Regeln}}, \underbrace{Z}_{\text{Startcollage}})$$

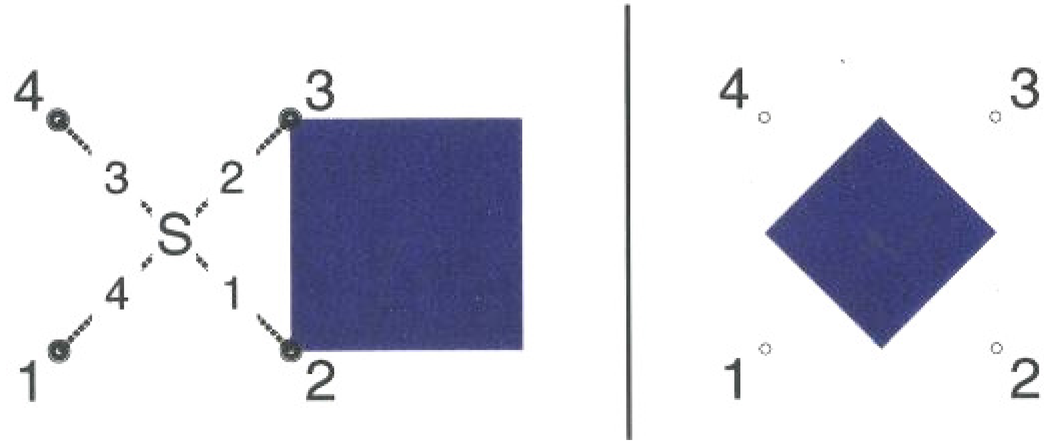
erzeugte Collagensprache

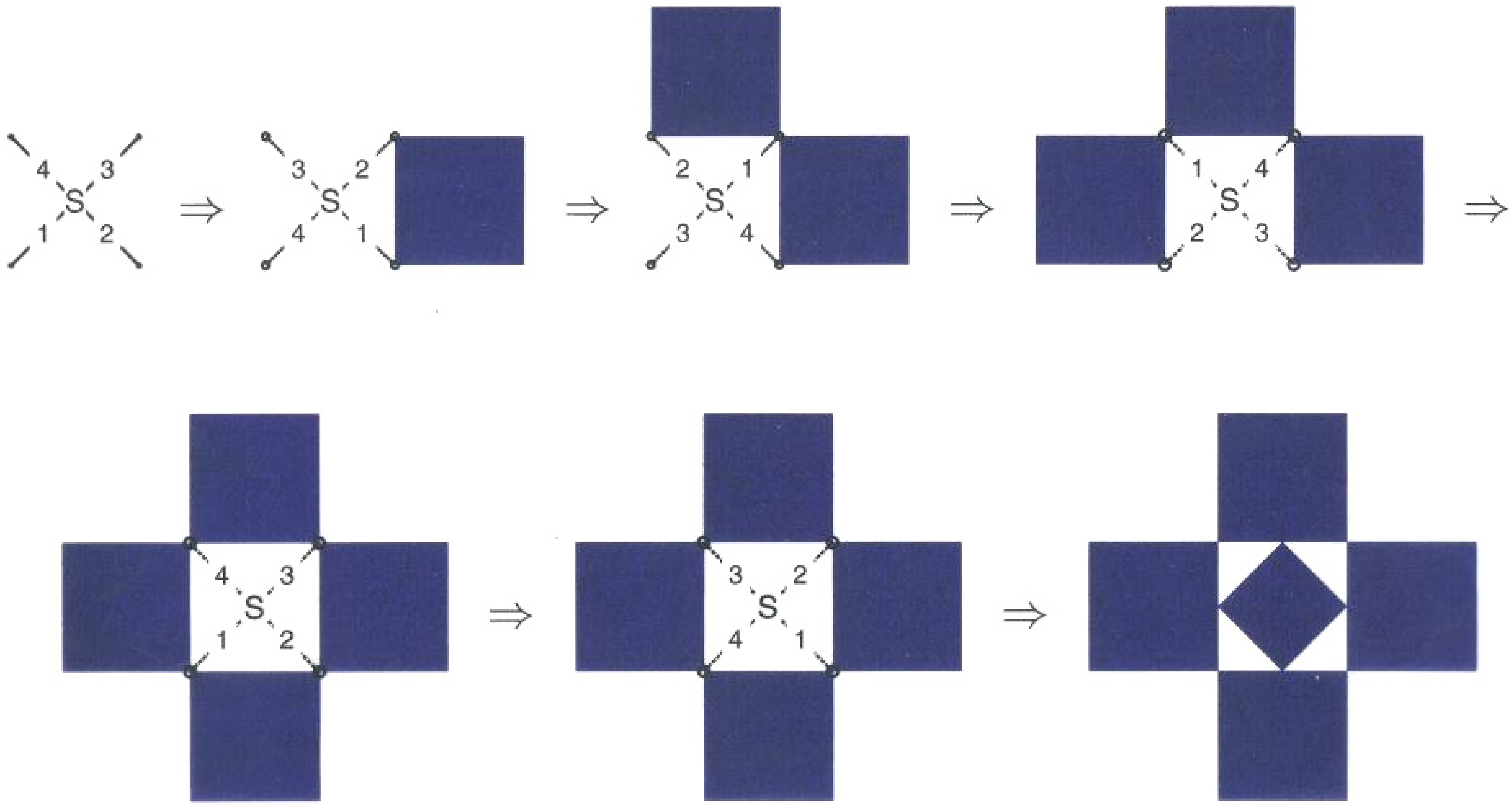
$$L(G) = \{ C \in \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{Collagen ohne Hyperkanten}} \mid Z \underbrace{\overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}}}_{\text{beliebige Wiederholung von Regelanwendungen}} C \}$$

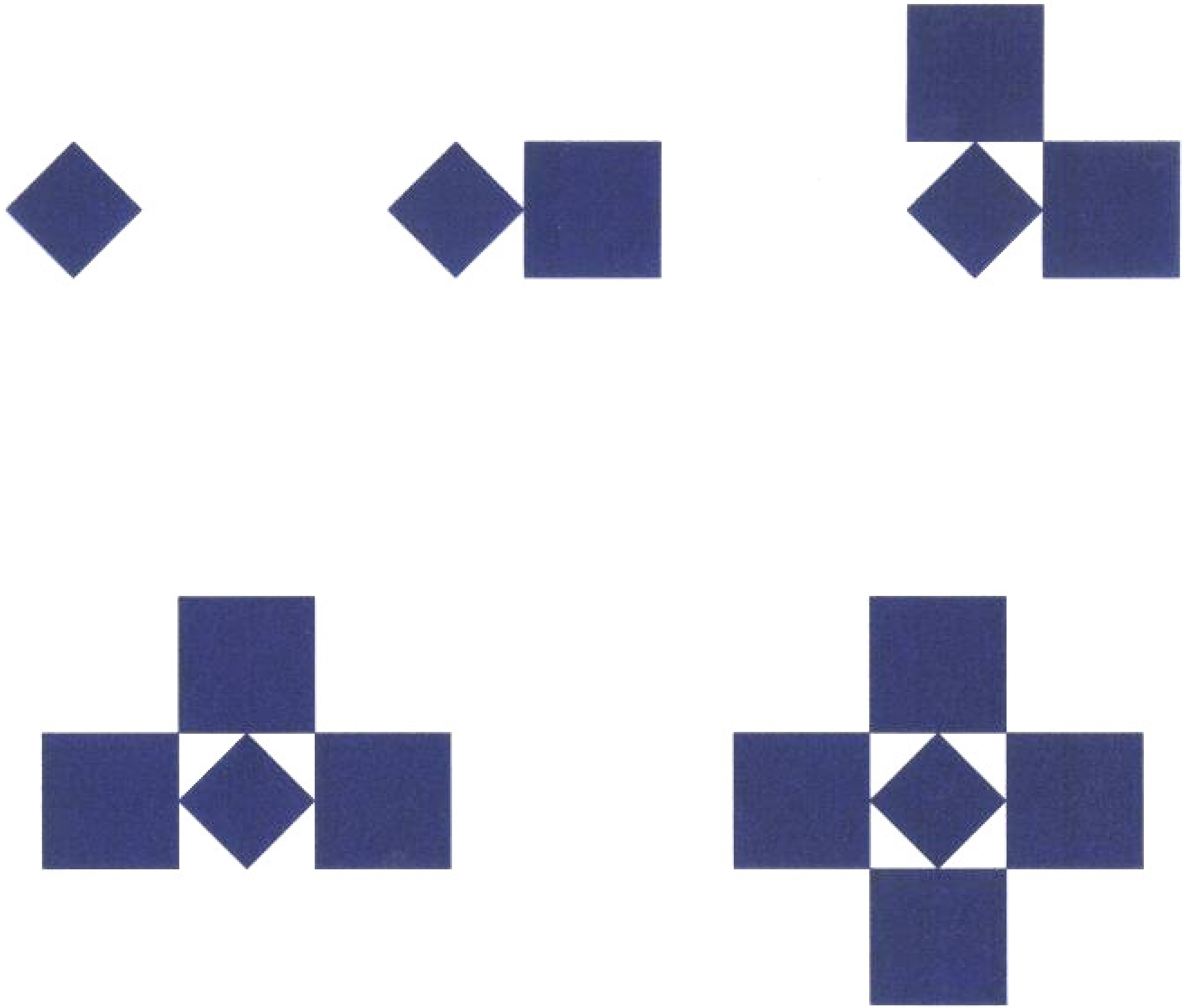
START =



S ::=

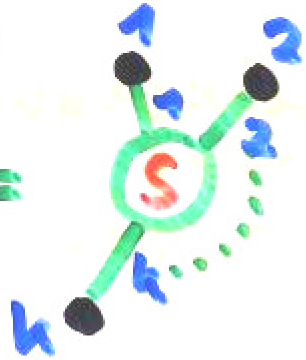



4 3 S 1 2
3 2 S 4 1
2 1 S 3 4
1 4 S 2 3
4 3 S 1 2
3 2 S 4 1



propere Collagen-Grammatik

$G=(N,P,Z)$ mit

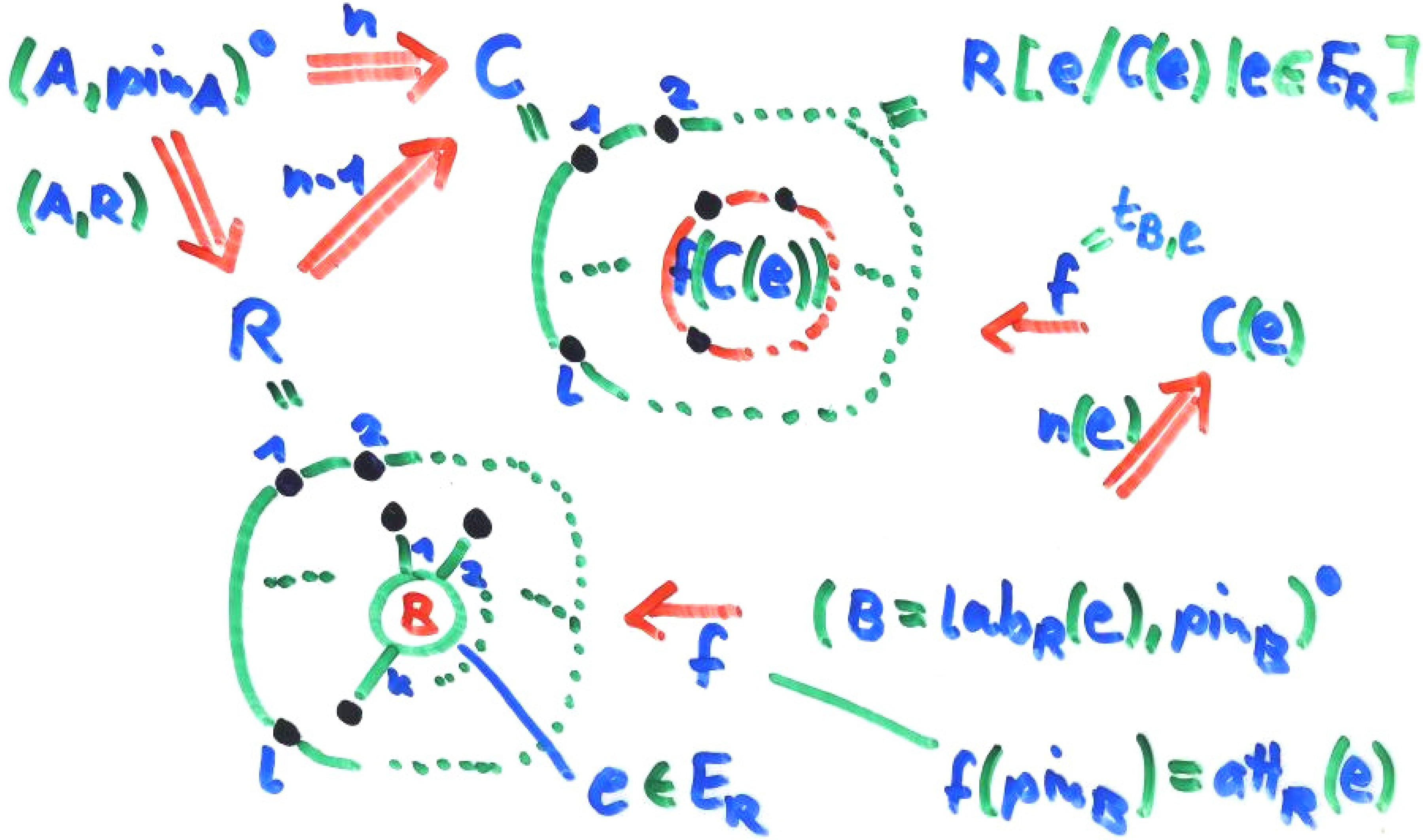
(1) $Z=(S,pin_S)^\bullet =$ 

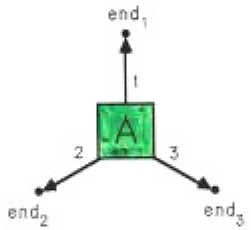
mit $S\in N$ und $pin_S = 1\dots k \in (\mathbb{R}^d)^*$

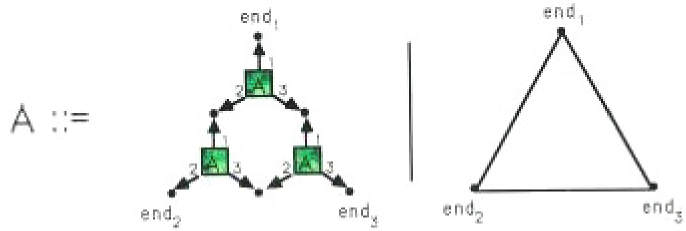
(2) $(A::=R_i)\in P$ für $i=1,2$ impliziert $pin_{R_1} = pin_{R_2} =: pin_A$

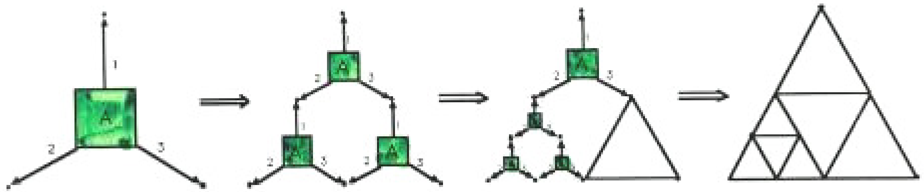
(3) $(A::=R)\in P,\ e\in E_R,\ lab_R(e)=B,\ (B::=R')\in P$ impliziert Existenz einer eindeutigen affinen Transformation $t_{B,e}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ mit $t_{B,e}(pin_B)=att_R(e)$

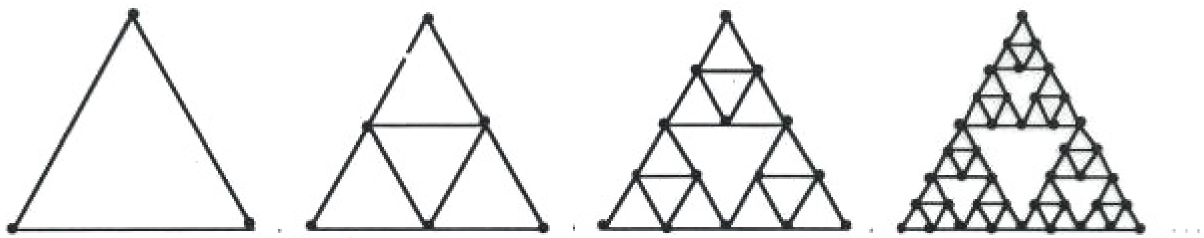
Kontextfreiheitslemma

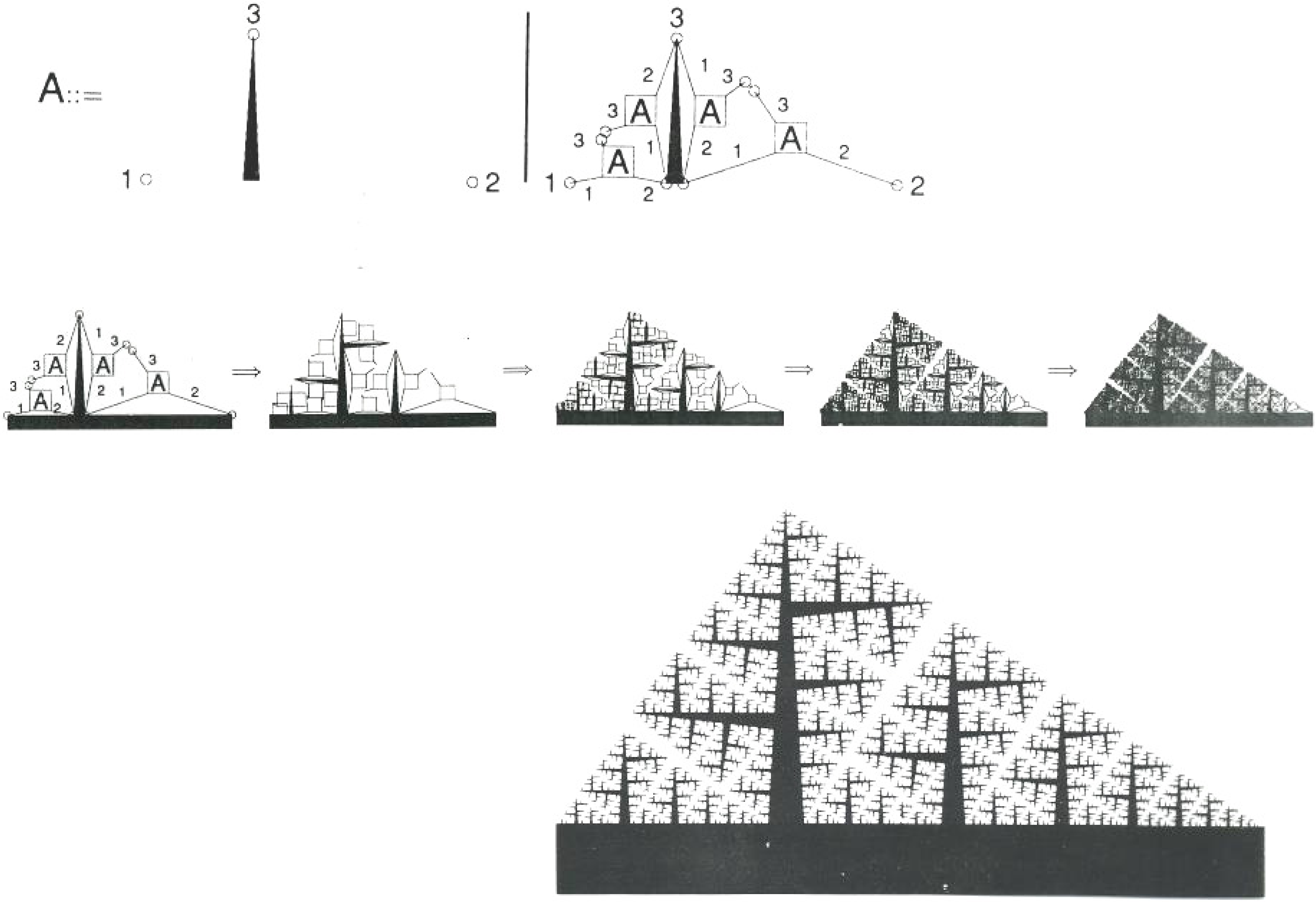



end1
1
A
2
3
end2
end3

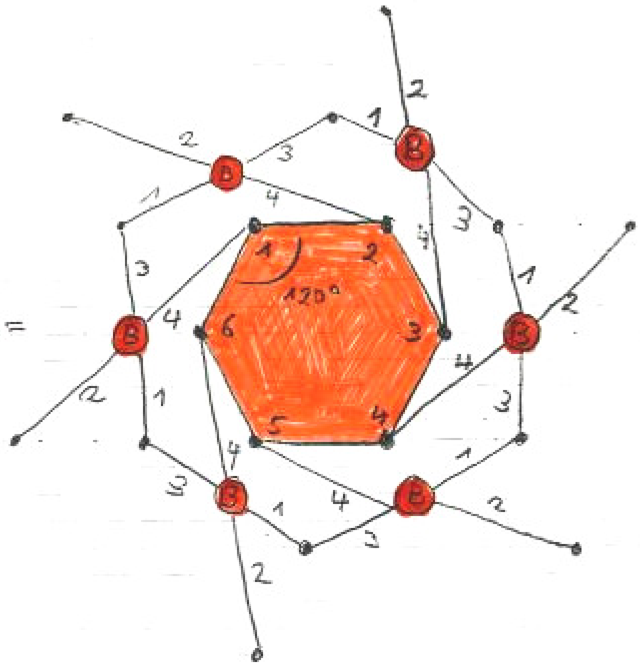

A ::=
end1
A
end2
end3
end1
end2
end3


A

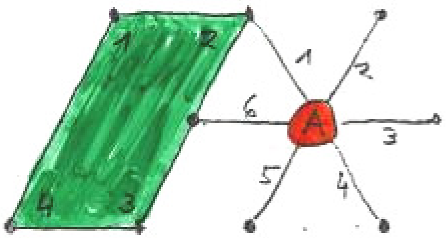


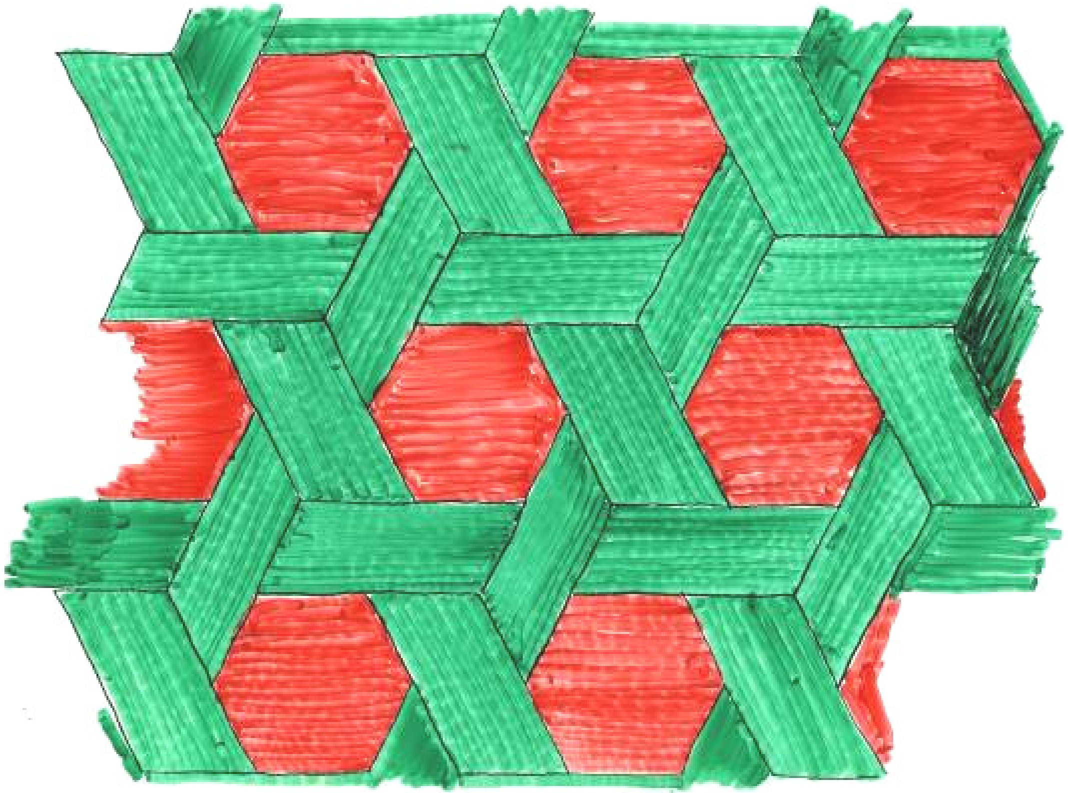

A::=
3
1
2
A
A
A
A
1
2
3

A ::=

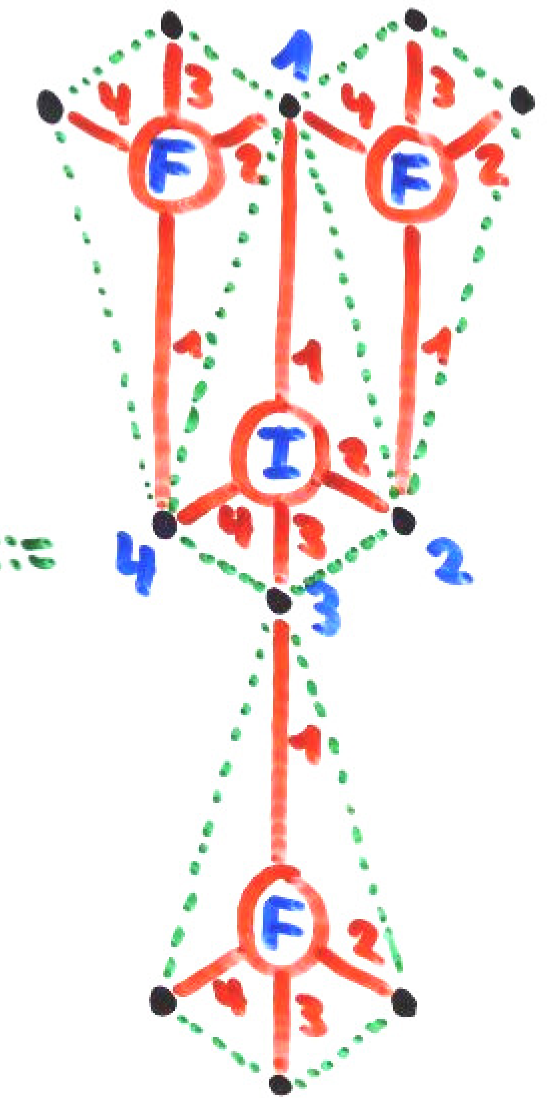


B ::=

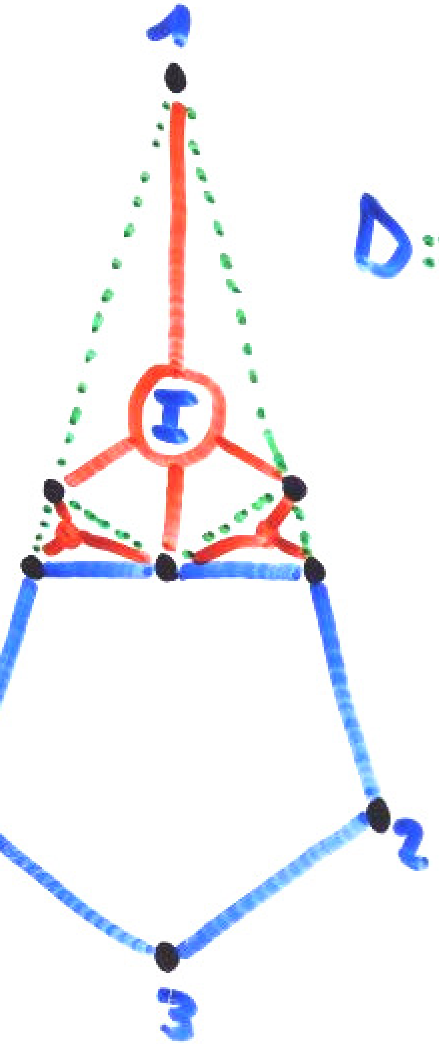




F ::=



I ::=



D ::=