Syntaktische Methoden der Bilderzeugung

Hans-Jörg Kreowski

WS 2006/2007

die folgenden Folien gehören zum Thema **iterierte Funktionensysteme**:

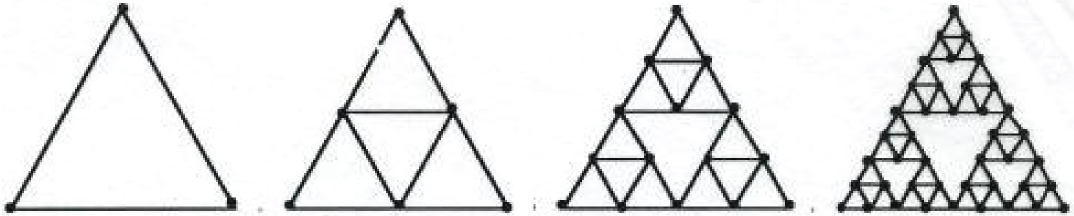
- **Definition iterierter Funktionensysteme**
- **Attraktor und Fixpunkttheorem**
- **Übersetzung nach Collagen-Grammatiken**
- **vernetzte iterierte Funktionensysteme**
- **Bezug zu endlichen Automaten**
- **Beispiele**

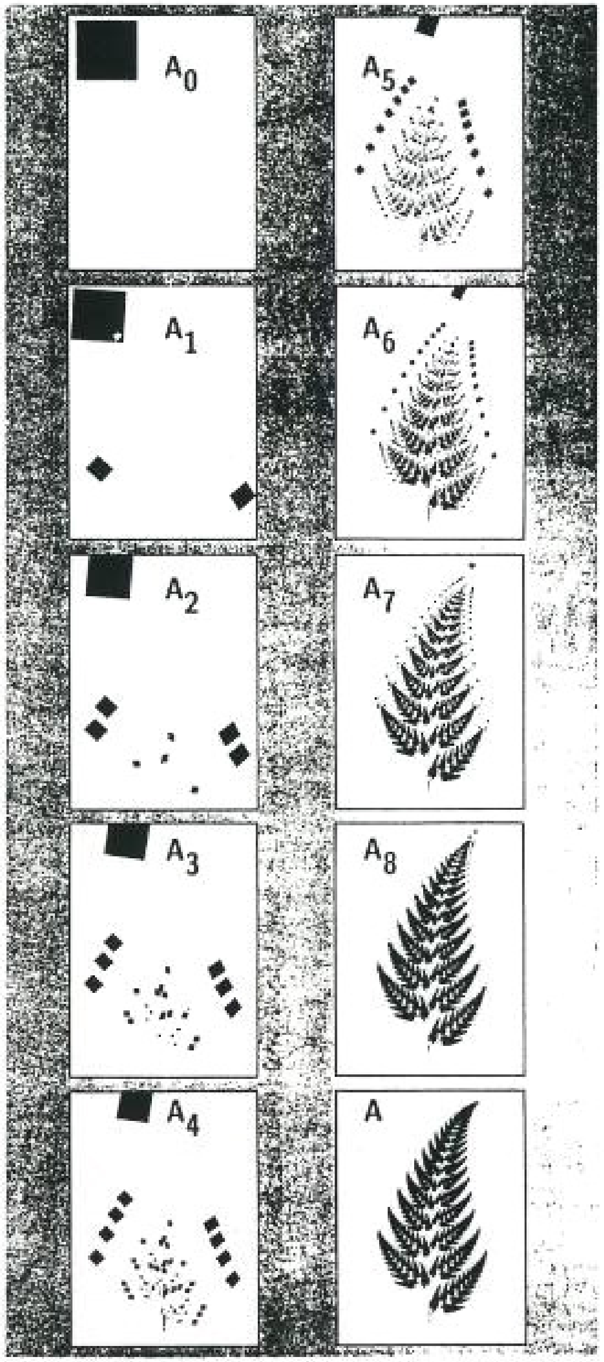
iterierte Funktionensysteme

- IFS: endl. Menge F von Transformationen auf dem $\mathbb{R}^n$ (insbes. affine)
- F kontrahierend, falls $c < 1$ ex. mit $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $f \in F$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$

Beobachtung: kontrahierend impliziert stetig

- Hutchinson-Operator: $F(X) = \bigcup_{f \in F} f(X)$ für $X \subseteq \mathbb{R}^n$
- Bildfolge mit Anfangsbild $B \subseteq \mathbb{R}^n$ (wählbar): $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $B_0 = B$ und $B_{j+1} = F(B_j)$





A_0
A_5
A_1
A_6
A_2
A_7
A_3
A_8
A_4
A

▷ F-Sequenz $\mathfrak{g} = (g_i)_{i \geq 1}$ mit $g_i \in F$ induziert für $x_0 \in B$ Punktfolge $\mathfrak{g}(x_0) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit
$x_i = g_1 \cdots g_i(x_0)$ für $i \geq 1$

Beobachtungen: (1) $x_j \in B_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$

(2) $|x_i - x_0| < \max \cdot \frac{1}{1-c}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

max. $|f(x_0) - x_0|$ für $f \in F$

d.h. alle B_j liegen in beschränktem Bereich

(3) $|x_i - x_j| \xrightarrow[i,j \to \infty]{} 0$ (Cauchy-Folge)

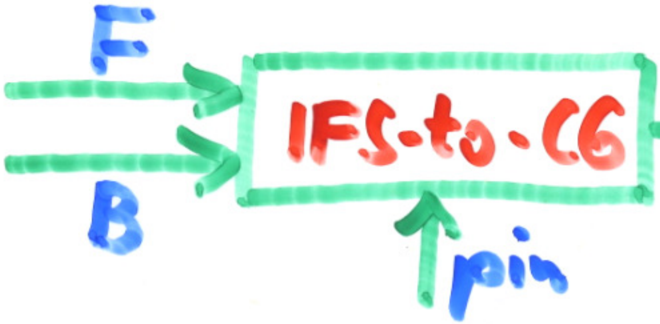
(4) Grenzwert unabhängig von x_0, falls B beschränkt
(und damit auch unabhängig von B)

D Attraktor von F: Menge aller Grenzwerte aller von F-Sequenzen induzierten Punktfolgen (mit frei gewählten beschränkten B): Attr(F)

Theorem: F(Attr(F)) = Attr(F)

d.h. der Attraktor von F ist Fixpunkt des Hutchinson-Operator und selbstaffin, falls F nur affine Transformationen enthält (selbstähnlich im Falle von Ähnlichkeitstransformationen)

Übersetzung von IFS in T0L-Collagen-Gr.

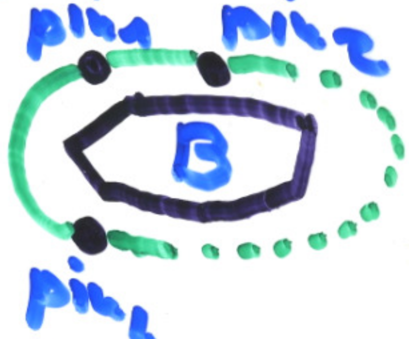


$CG(F,B) =$

$(\{S\}, \{(S,R_1)\}, \{(S,R_2)\}, (S,pin)^0)$

$F = \{f_1, \ldots, f_k\}$

mit $R_1 = (\{B\}, pin) =$



Vor.:

$f(pin) = f'(pin)$

impl. $f = f'$

und

$R_2 =$

$e_i \in E_{R_2} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Theorem

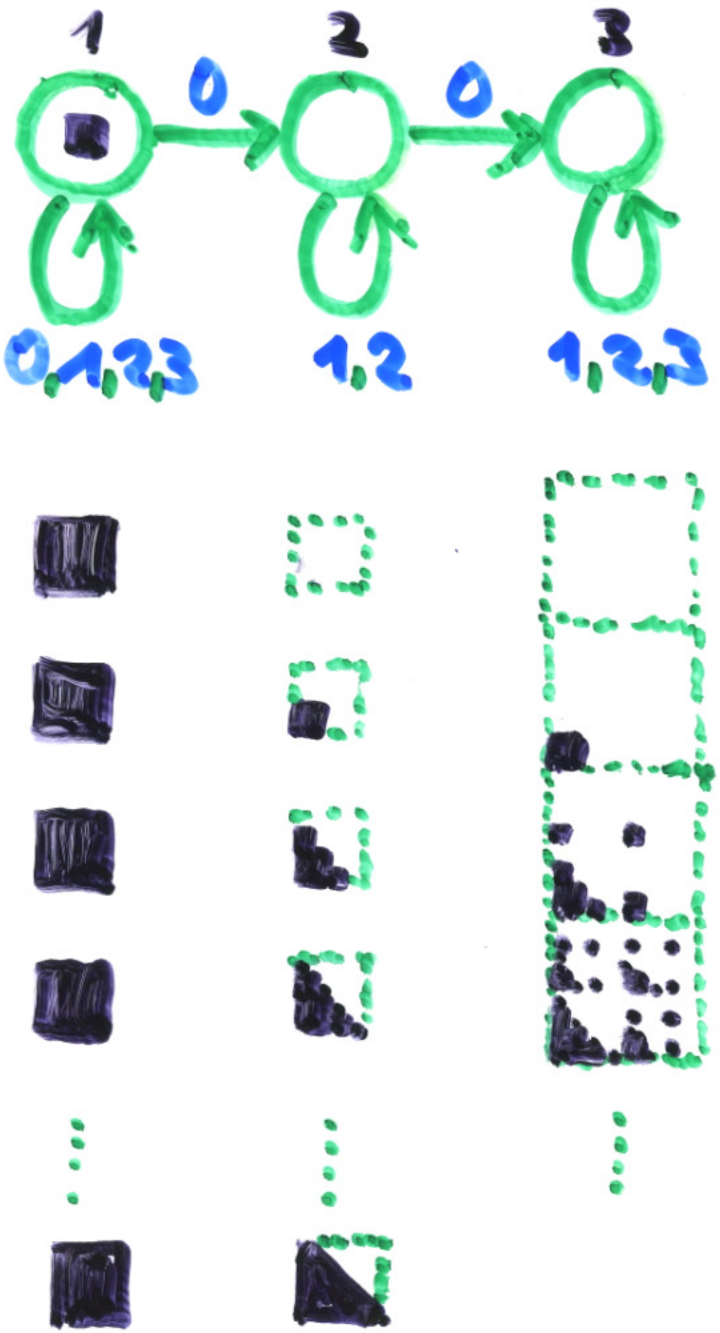
$(S,pin)^0 \overset{j}{\underset{(S,R_2)}{\Longrightarrow}} \bar{C}_j \underset{(S,R_1)}{\Longrightarrow} C_j$ impl. $B_j = pattern(C_j)$

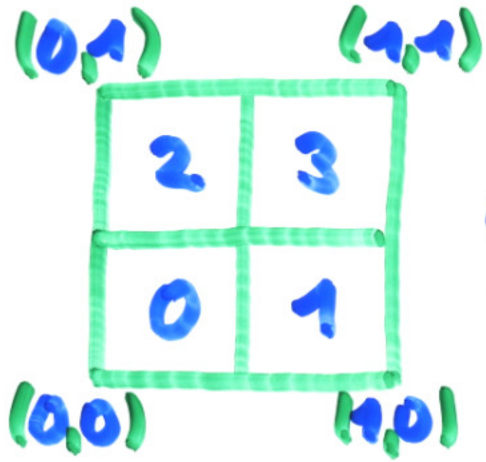
vernetzte iterierte Funktionensysteme

- $G = (V, E, s, t, F)$

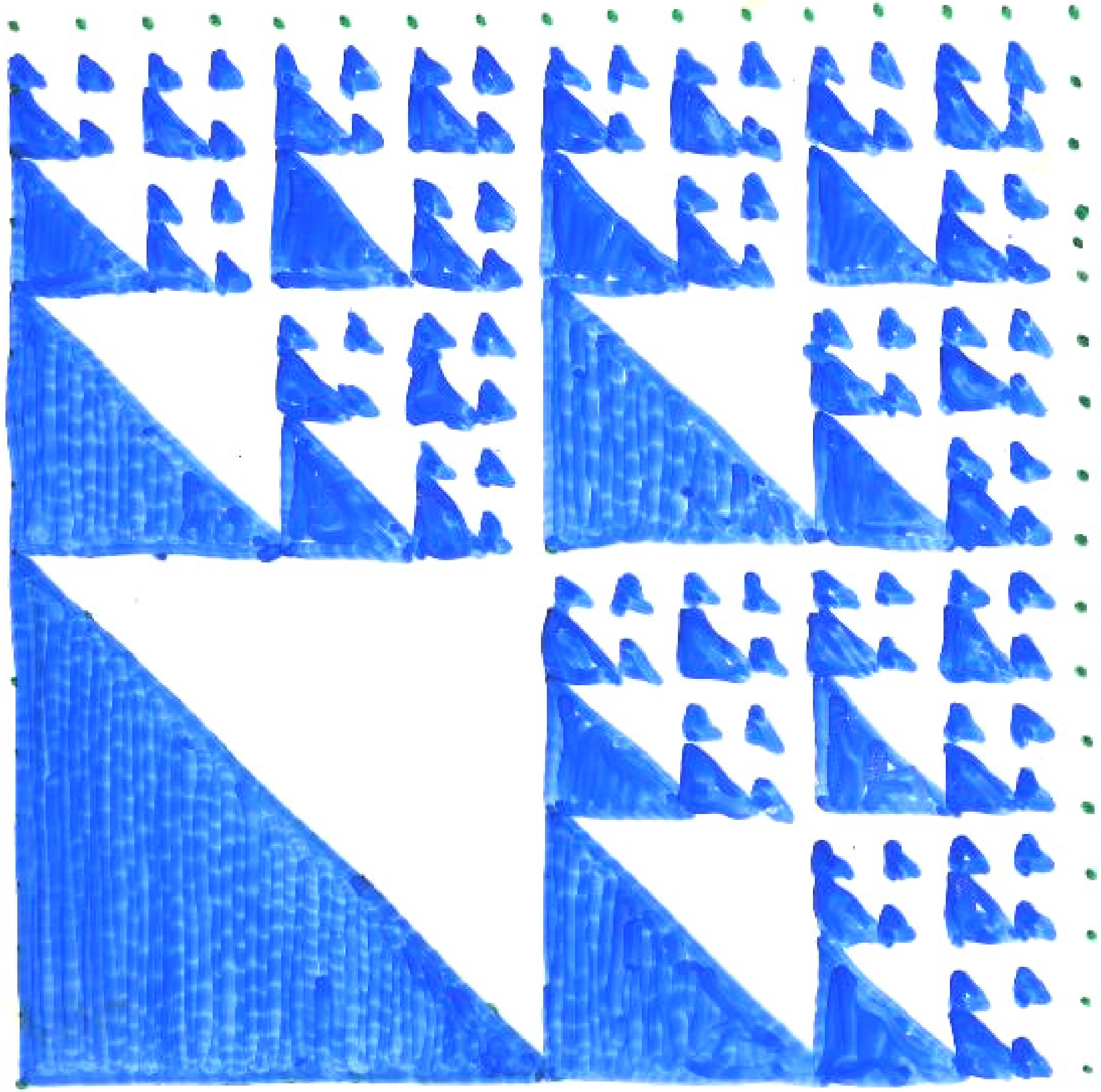
  Knoten (V), Kanten (E), Quelle (s), Ziel (t), Markierung (F)

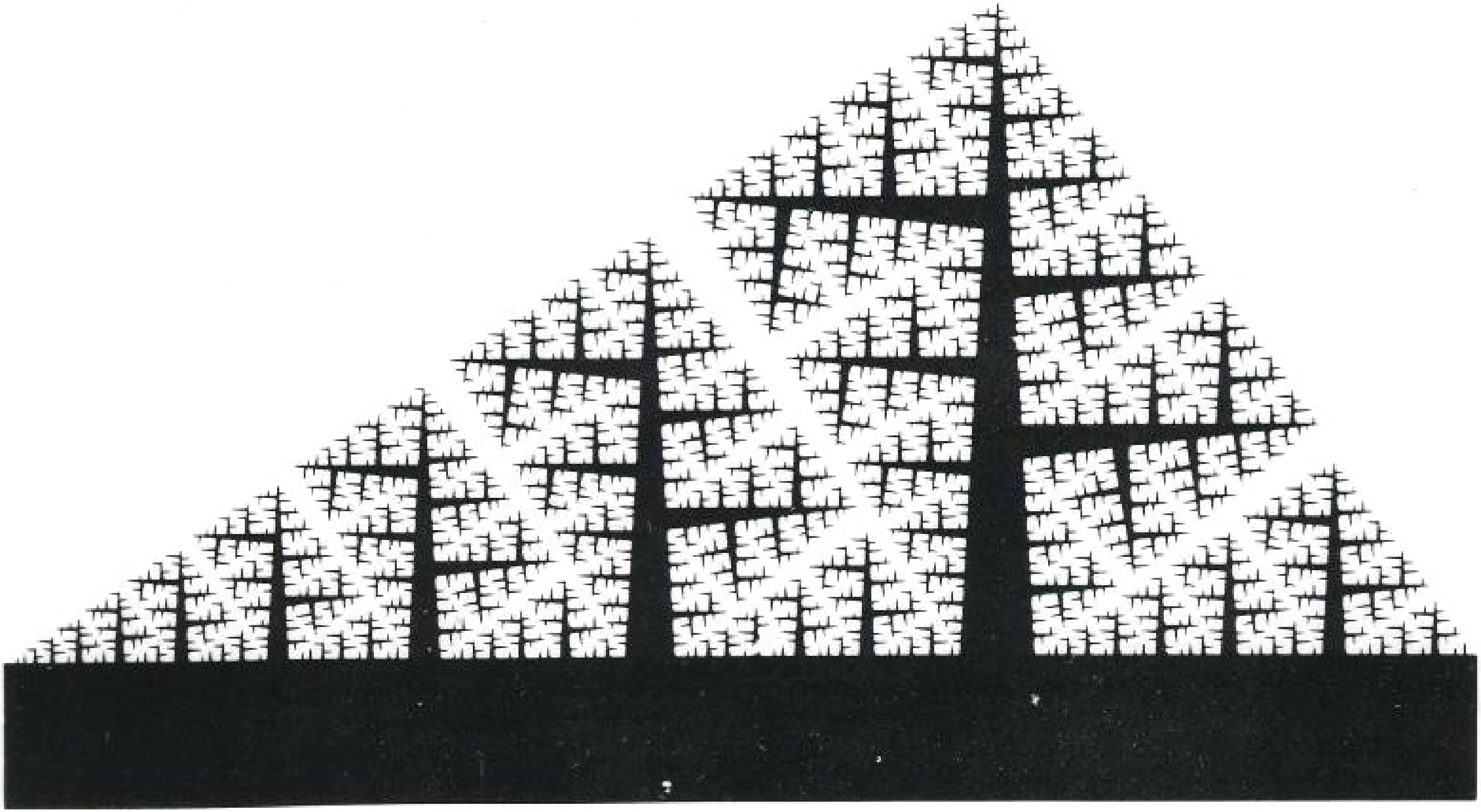
  gerichteter Graph mit Kantenmarkierung in $AFF(\mathbb{R}^d)$
- Anfangsbildvektor $B : V \to 2^{(\mathbb{R}^d)}$
- Hutchinson-Operator: $F(X) : V \to 2^{(\mathbb{R}^d)}$ für $X : V \to 2^{(\mathbb{R}^d)}$ def. durch $F(X)(v) = \bigcup_{\substack{e \in E \\ t(e) = v}} F(e)(X(s(e)))$
- Bildvektorsequenz $B_0 = B$ & $B_{i+1} = F(B_i)$

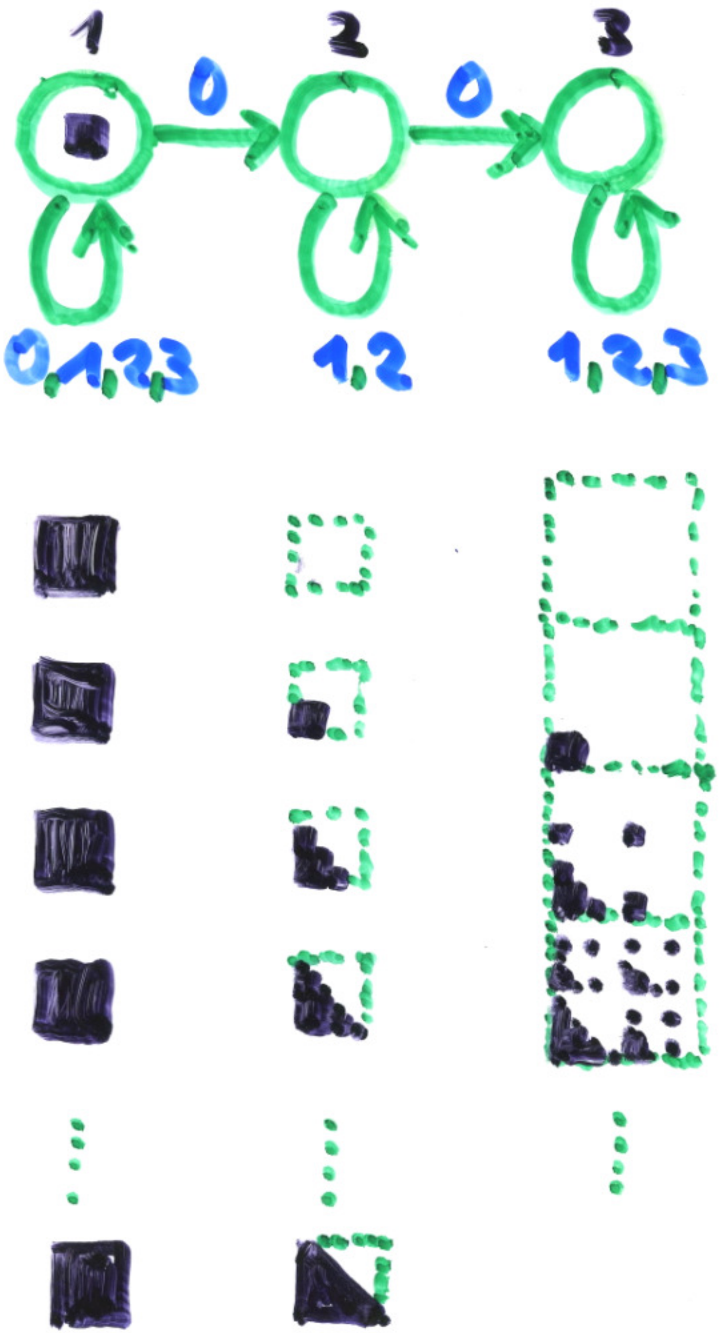


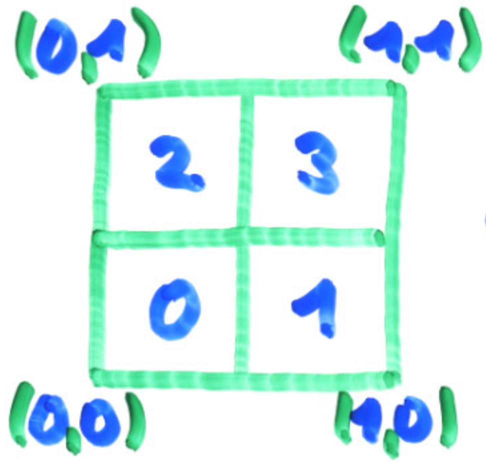


$a_i = i$

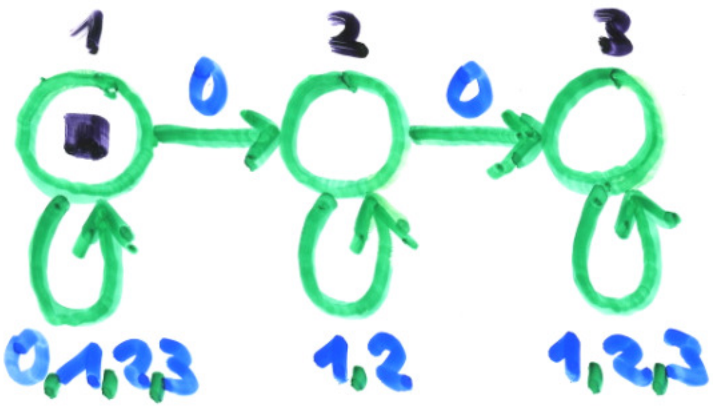


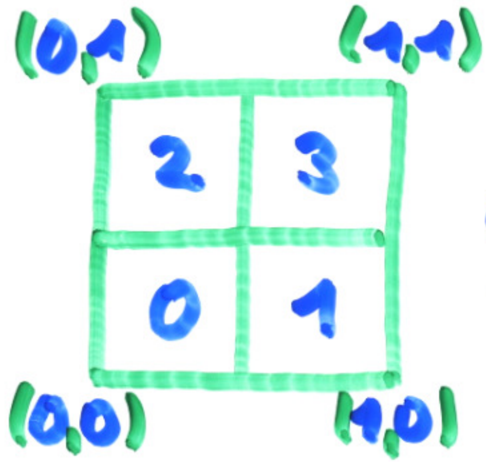




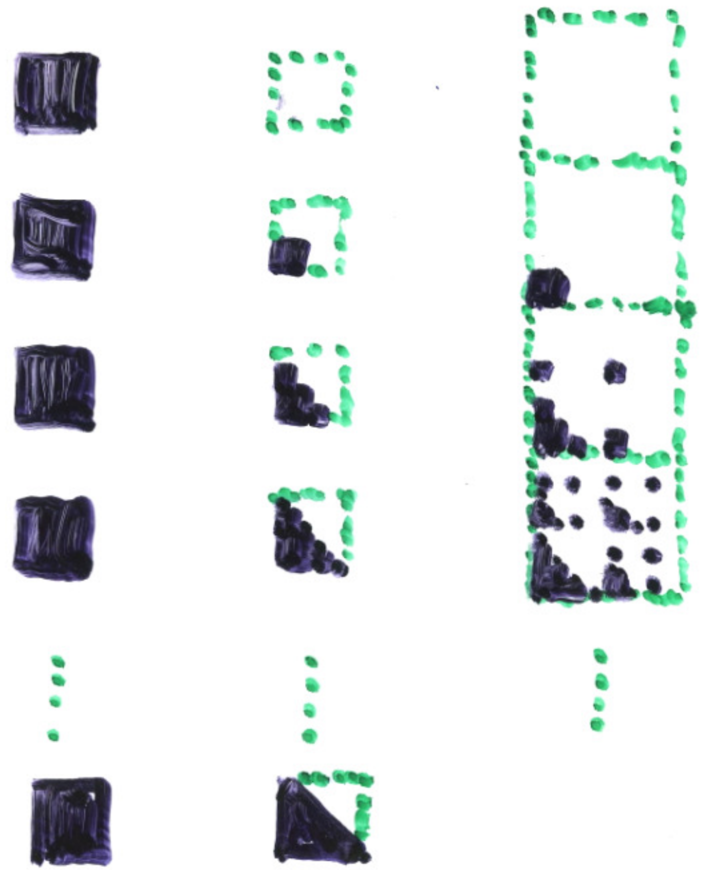


$a_i = i$





$a_i = i$



erkannte Sprachen:

1,1: $(0|1|2|3)^*$

1,2: $(0|1|2|3)^* 0 (1|2)^*$

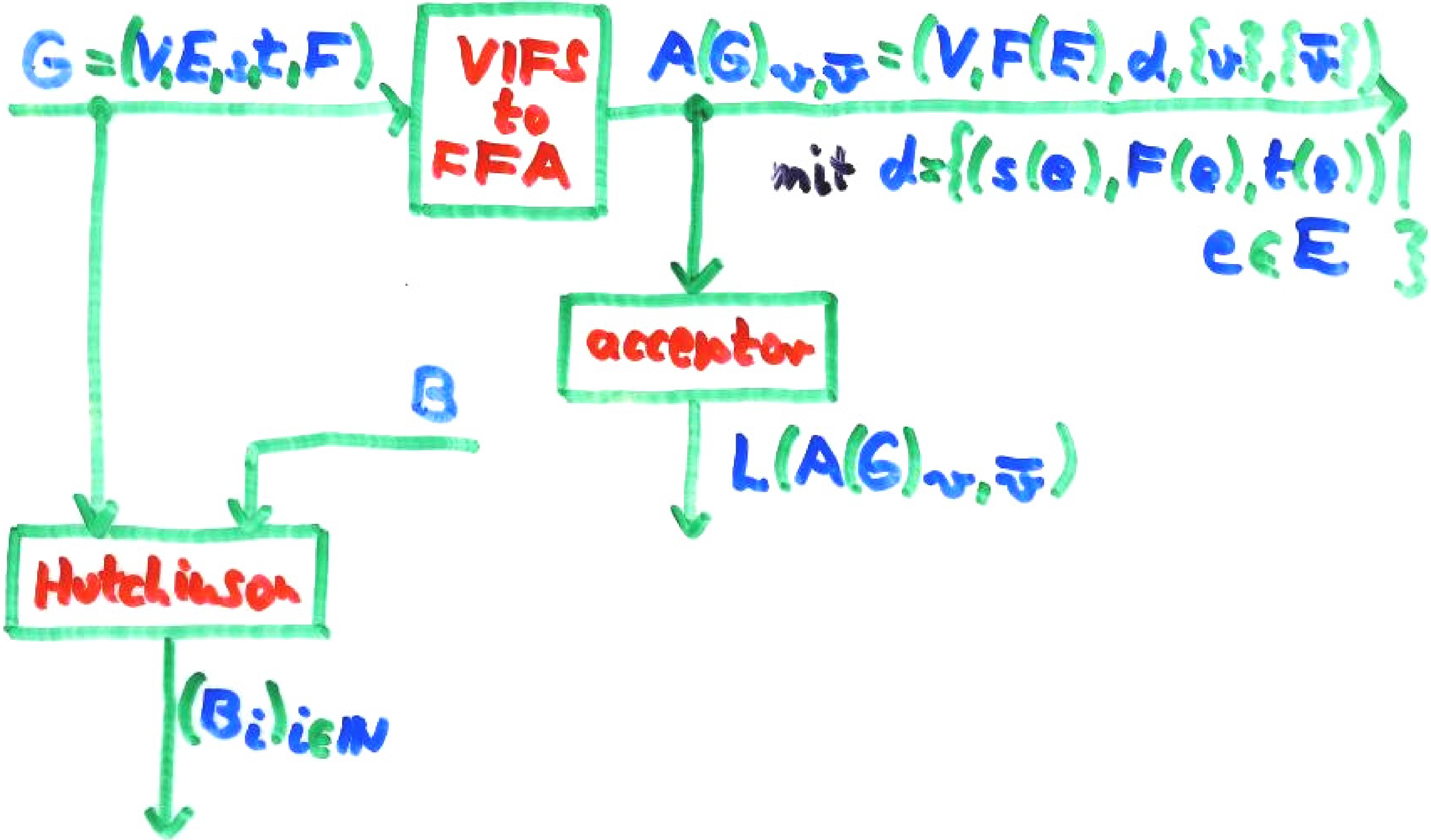
1,3: $(0|1|2|3)^* 0 (1|2)^* 0 (1|2|3)^*$

2,2: $(1|2)^*$

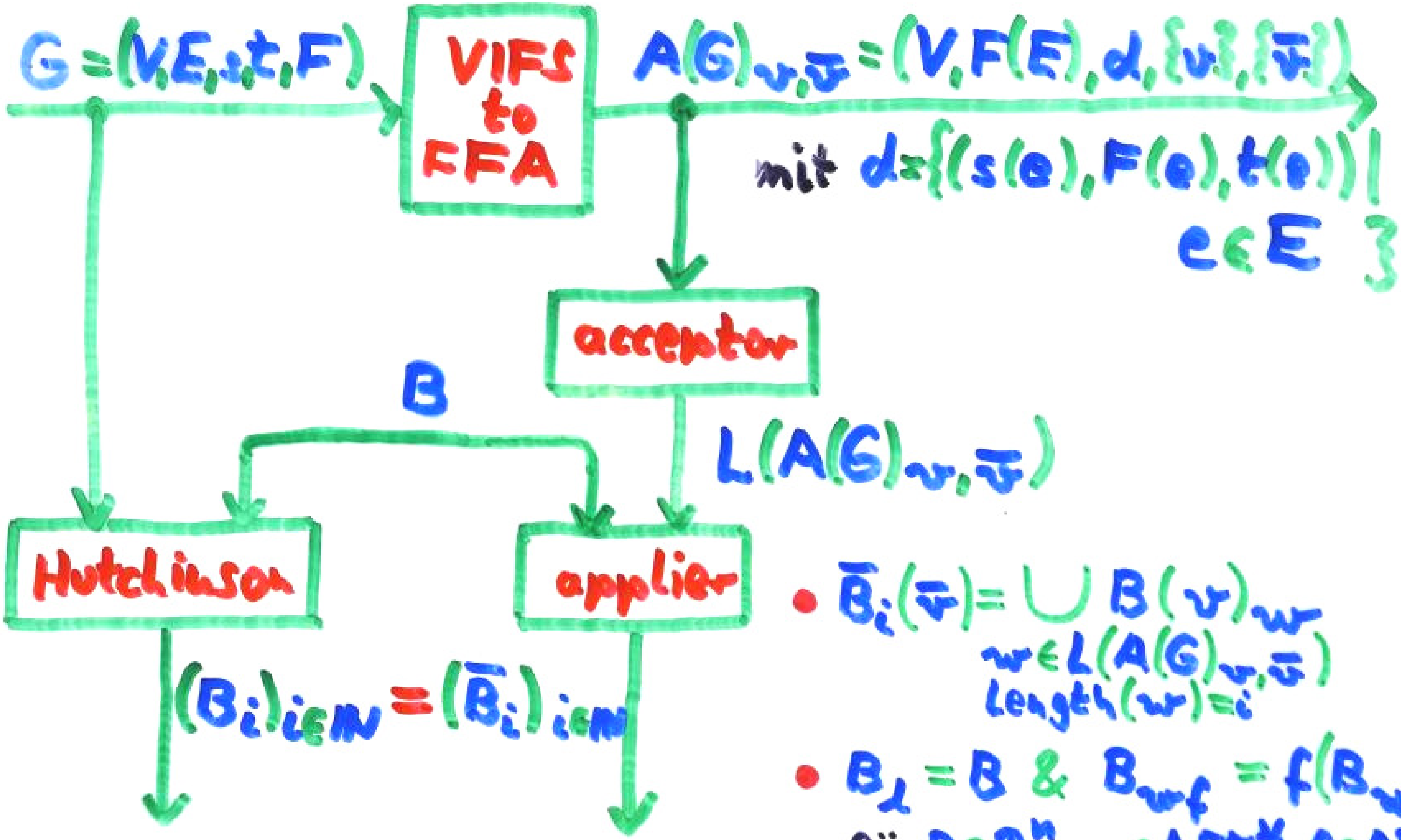
2,3: $(1|2)^* 0 (1|2|3)^*$

3,3: $(1|2|3)^*$

vernetzte IFS als Familien endlicher Automaten



vernetzte IFS als Familien endlicher Automaten



- $\bar{B}_i(\bar{v}) = \bigcup_{\substack{w \in L(A(G)_{v,\bar{v}}) \\ \mathrm{length}(w)=i}} B(v)_w$
- $B_\lambda = B$ & $B_{wf} = f(B_w)$
  für $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $w \in AFF^*$, $f \in AFF$

Carol

(a) Original 512 × 512, 8 bpp

512x512

8 bpp

(b) Fälschung* WFA, 0.0734 bpp

Fig. 3.4. Image

* Kompression mit endl. Automaten