Formale Modellierung
# Vorlesung 2 vom 20.04.15: Aussagenlogik und natürliches Schließen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2015



## Heute

- Einführung in die formale Logik
- Aussagenlogik
  - Beispiel für eine einfache Logik
  - Guter Ausgangspunkt
- Natürliches Schließen
  - Wird auch von Isabelle verwendet.
- Buchempfehlung:
  Dirk van Dalen: Logic and Structure. Springer Verlag, 2004.



## Fahrplan

- Teil I: Formale Logik
  - Einführung
  - Aussagenlogik (PL): Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
  - Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
  - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
  - FOL mit induktiven Datentypen
  - FOL mit rekursiven Definitionen
  - Logik höherer Stufe (HOL): Syntax und Eigenschaften
  - Berechungsmodelle (Models of Computation)
  - Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- Teil II: Spezifikation und Verifikation



## Formalisierung von Aussagen

- Beispielaussagen:
  1. John fuhr weiter und stieß mit einem Fußgänger zusammen.
  2. John stieß mit einem Fußgänger zusammen und fuhr weiter.
  3. Wenn ich das Fenster öffne, haben wir Frischluft.
  4. Wenn wir Frischluft haben, dann ist $1 + 3 = 4$
  5. Wenn $1 + 2 = 4$, dann haben wir Frischluft.
  6. John arbeitet oder ist zu Hause.
  7. Euklid war ein Grieche oder ein Mathematiker.
- Probleme natürlicher Sprache:
  - Mehrdeutigkeit
  - Synonyme
  - Versteckte (implizite) Annahmen



## Formale Logik

- Ziel: Formalisierung von Folgerungen wie
  - Wenn es regnet, wird die Straße nass.
  - Es regnet.
  - Also ist die Straße nass.
  - Nachts ist es dunkel.
  - Es ist hell.
  - Also ist es nicht nachts.
- Eine Logik besteht aus
  - Einer Sprache $\mathcal{L}$ von Formeln (Aussagen)
  - Einer Semantik, die Formeln eine Bedeutung zuordnet
  - Schlußregeln (Folgerungsregeln) auf den Formeln.
- Damit: Gültige ("wahre") Aussagen berechnen.



## Beispiel für eine Logik

- Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$
- Schlußregeln:

Aus $\diamondsuit$ folgt $\clubsuit$ — Aus $\diamondsuit$ folgt $\spadesuit$ — Aus $\clubsuit$ und $\spadesuit$ folgt $\heartsuit$ — $\diamondsuit$ gilt immer

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit}\,\alpha \qquad \frac{\diamondsuit}{\spadesuit}\,\beta \qquad \frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit}\,\gamma \qquad \frac{}{\diamondsuit}\,\delta$$

- Beispielableitung: $\heartsuit$



## Aussagenlogik

- Sprache *Prop* gegeben durch:
  1. Variablen (Atome) $V \subseteq \mathit{Prop}$ (Menge $V$ gegeben)
  2. $\bot \in \mathit{Prop}$
  3. Wenn $\phi, \psi \in \mathit{Prop}$, dann
     - $\phi \wedge \psi \in \mathit{Prop}$
     - $\phi \vee \psi \in \mathit{Prop}$
     - $\phi \longrightarrow \psi \in \mathit{Prop}$
     - $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathit{Prop}$
  4. Wenn $\phi \in \mathit{Prop}$, dann $\neg\phi \in \mathit{Prop}$.
- NB. Präzedenzen: $\neg$ vor $\wedge$ vor $\vee$ vor $\longrightarrow, \longleftrightarrow$



## Wann ist eine Formel gültig?

- Semantische Gültigkeit $\models P$
  - Übersetzung in semantische Domäne
  - Variablen sind wahr oder falsch
  - Operationen verknüpfen diese Werte
- Syntaktische Gültigkeit $\vdash P$
  - Formale Ableitung
  - Natürliches Schließen
  - Sequenzenkalkül
  - Andere (Hilbert-Kalkül, gleichungsbasierte Kalküle, etc.)

## Semantik

- Domäne: $\{0, 1\}$ (0 für falsch, 1 für wahr)

**Definition (Semantik aussagenlogischer Formeln)**

Für Valuation $v : V \to \{0, 1\}$ ist $[\![\cdot]\!]_v : Prop \to \{0, 1\}$ definiert als

$$
\begin{aligned}
[\![w]\!]_v &= v(w) \quad (\text{mit } w \in V)\\
[\![\bot]\!]_v &= 0\\
[\![\phi \wedge \psi]\!]_v &= \min([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v)\\
[\![\phi \vee \psi]\!]_v &= \max([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v)\\
[\![\phi \longrightarrow \psi]\!]_v = 0 &\iff [\![\phi]\!]_v = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]_v = 0\\
[\![\phi \longleftrightarrow \psi]\!]_v = 1 &\iff [\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v\\
[\![\neg\phi]\!]_v &= 1 - [\![\phi]\!]_v
\end{aligned}
$$



## Semantische Gültigkeit und Folgerung

- Semantische Gültigkeit: $\models \phi$

$$\models \phi \text{ gdw. } [\![\phi]\!]_v = 1 \text{ für alle } v$$

- Semantische Folgerung: sei $\Gamma \subseteq Prop$, dann

$$\Gamma \models \psi \text{ gdw. } [\![\psi]\!]_v = 1 \text{ wenn } [\![\phi]\!]_v = 1 \text{ für alle } \phi \in \Gamma$$



## Beweisen mit semantischer Folgerung

- Die Wahrheitstabellenmethode:
  - Berechne $[\![\phi]\!]_v$ für alle Möglichkeiten für $v$
- Beispiel: $\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$

| $\phi$ | $\psi$ | $\phi \longrightarrow \psi$ | $\neg\psi$ | $\neg\phi$ | $\neg\psi \longrightarrow \neg\phi$ | $(\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

- Problem: Aufwand exponentiell $2^a$ zur Anzahl $a$ der Atome
- Vorteil: Konstruktion von Gegenbeispielen



## Syntakische Gültigkeit: Natürliches Schließen

- Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$
- Schlußregeln:

$$
\frac{\diamondsuit}{\clubsuit}\,\alpha \qquad \frac{\diamondsuit}{\spadesuit}\,\beta \qquad \frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit}\,\gamma \qquad \frac{\begin{matrix}[\diamondsuit]\\ \vdots \\ \heartsuit\end{matrix}}{\heartsuit}\,\delta'
$$

- Beispielableitung: $\heartsuit$



## Natürliches Schließen (ND) für Aussagenlogik

- Vorgehensweise:
  1. Erst Kalkül nur für $\wedge, \longrightarrow, \bot$
  2. Dann Erweiterung auf alle Konnektive.
- Für jedes Konnektiv: Einführungs- und Eliminationsregel
- NB: konstruktiver Inhalt der meisten Regeln



## Natürliches Schließen — Die Regeln

$$
\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\,\wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\,\wedge E_L \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge E_R
$$

$$
\frac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \longrightarrow \psi}\,\longrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longrightarrow \psi}{\psi}\,\longrightarrow E
$$

$$
\frac{\bot}{\phi}\,\bot \qquad \frac{\begin{matrix}[\phi \longrightarrow \bot]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\phi}\,\text{raa}
$$



## Die fehlenden Konnektive

- Einführung als Abkürzung:

$$
\begin{aligned}
\neg\phi &\overset{def}{=} \phi \longrightarrow \bot\\
\phi \vee \psi &\overset{def}{=} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\\
\phi \longleftrightarrow \psi &\overset{def}{=} (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)
\end{aligned}
$$

- Ableitungsregeln als Theoreme.



## Die fehlenden Schlußregeln

$$
\frac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\phi}\,\neg I \qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\,\neg E
$$

$$
\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\,\vee I_L \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\,\vee I_R \qquad \frac{\phi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\phi]\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi]\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\,\vee E
$$

$$
\frac{\phi \longrightarrow \psi \quad \psi \longrightarrow \phi}{\phi \longleftrightarrow \psi}\,\longleftrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\psi}\,\longleftrightarrow E_L \qquad \frac{\psi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\phi}\,\longleftrightarrow E_R
$$

## Zusammenfassung

- Formale Logik formalisiert das (natürlichsprachliche) Schlußfolgern
- Logik: Formeln, Semantik, Schlußregeln (Kalkül)
- Aussagenlogik: Aussagen mit $\wedge$, $\longrightarrow$, $\bot$
  - $\neg$, $\vee$, $\longleftrightarrow$ als abgeleitete Operatoren
- Semantik von Aussagenlogik $[\![\cdot]\!]_v : \mathit{Prop} \to \{0, 1\}$
- Natürliches Schließen: intuitiver Kalkül
- Nächste Woche:
  - Konsistenz und Vollständigkeit von Aussagenlogik