

Formale Modellierung

Vorlesung 4 vom 04.05.15: Prädikatenlogik erster Stufe

Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2015

16.21.34 2015-07-13

1 [16]

Fahrplan

- ▶ **Teil I: Formale Logik**
 - ▶ Einführung
 - ▶ Aussagenlogik (PL): Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
 - ▶ **Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik**
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
 - ▶ FOL mit induktiven Datentypen
 - ▶ FOL mit rekursiven Definitionen
 - ▶ Logik höherer Stufe (HOL): Syntax und Eigenschaften
 - ▶ Berechnungsmodelle (Models of Computation)
 - ▶ Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- ▶ **Teil II: Spezifikation und Verifikation**

2 [16]

Das Tagesmenü

- ▶ Von Aussagenlogik zur Prädikatenlogik
- ▶ Logik mit **Quantoren**
- ▶ **Semantik** der Prädikatenlogik
- ▶ **Natürliches Schließen** mit Quantoren

3 [16]

Eine Beispielspezifikation

Das Flugbuchungssystem

Das **Flugbuchungssystem** soll eine Menge von Flügen verwalten, Anfragen beantworten und Buchungen vornehmen.

Ein **Flug** hat einen Startflughafen und ein Zielflughafen (durch ihr IATA-Kürzel repräsentiert), eine eindeutige Kennung, einen Starttermin, eine Ankunftszeit, sowie eine Anzahl von verfügbaren Plätzen.

Eine **Flugbuchung** für einen durch die Flugnummer und Starttermin identifizierten Flug soll eine Anzahl von Plätzen auf diesem Flug reservieren. Sind die verfügbaren Plätze für einen Flug erschöpft, können keine weiteren Buchungen vorgenommen werden.

Eine **Anfrage** besteht aus den Daten (Start, Ziel, Datum) für einen Flug, und liefert die Anzahl freier Plätze auf diesem Flug zurück.

4 [16]

Beschränkungen der Aussagenlogik

- ▶ **Beschränkung** der Aussagenlogik:
 - ▶ Die Menge unserer Atome ist **unstrukturiert** und **flach**.
 - ▶ Wir können nicht zwischen **Logik** (Meta-Ebene) und **Objekt** unterscheiden.
 - ▶ Wir können keine **strukturellen** Eigenschaften beschreiben.
 - ▶ Wir können keine Aussagen über **Existenz** von Objekten machen.
- ▶ **Ziel**: Formalisierung von Aussagen wie
 - ▶ "Ein Flug hat eine **eindeutige** Kennung."
 - ▶ "Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich."
 - ▶ "Alle Zahlen sind ein Produkt von Primfaktoren."

5 [16]

Prädikatenlogik: Erweiterung der Sprache

- ▶ **Terme** beschreiben die zu formalisierenden Objekte.
- ▶ **Formeln** sind logische Aussagen.
- ▶ Eine **Signatur** Σ beschreibt Prädikate und Funktionen:
 - ▶ **Prädikatsymbole**: P_1, \dots, P_n , \doteq mit **Arität** $ar(P_i) \in \mathbb{N}$, $ar(\doteq) = 2$
 - ▶ **Funktionsymbole**: f_1, \dots, f_m mit **Arität** $ar(f_i) \in \mathbb{N}$
- ▶ Menge X von **Variablen** (abzählbar viele)
- ▶ **Konnektive**: $\wedge, \rightarrow, \perp, \forall, \exists$, abgeleitet: $\vee, \leftrightarrow, \neg, \leftarrow, \exists$
- ▶ Die **Trennung** zwischen **Termen** und **Formeln** ist der wesentliche Abstraktionsschritt in der Prädikatenlogik.

6 [16]

Terme

- ▶ Menge $Term_\Sigma$ der **Terme** (zur Signatur Σ) gegeben durch:
 - ▶ Variablen: $X \subseteq Term_\Sigma$
 - ▶ Funktionssymbol $f \in \Sigma$ mit $ar(f) = n$ und $t_1, \dots, t_n \in Term_\Sigma$, dann $f(t_1, \dots, t_n) \in Term_\Sigma$
 - ▶ Sonderfall: $n = 0$, dann ist f eine **Konstante**, $f \in Term_\Sigma$

7 [16]

Formeln

- ▶ Menge $Form_\Sigma$ der **Formeln** (zur Signatur Σ) gegeben durch:
 - ▶ $\perp \in Form_\Sigma$
 - ▶ Wenn $\phi \in Form_\Sigma$, dann $\neg\phi \in Form_\Sigma$
 - ▶ Wenn $\phi, \psi \in Form_\Sigma$, dann $\phi \wedge \psi \in Form_\Sigma$, $\phi \vee \psi \in Form_\Sigma$,
 $\phi \rightarrow \psi \in Form_\Sigma$, $\phi \leftrightarrow \psi \in Form_\Sigma$
 - ▶ Wenn $\phi \in Form_\Sigma$, $x \in X$, dann $\forall x.\phi \in Form_\Sigma$, $\exists x.\phi \in Form_\Sigma$
 - ▶ Prädikatsymbol $p \in \Sigma$ mit $ar(p) = m$ und $t_1, \dots, t_m \in Term_\Sigma$, dann $p(t_1, \dots, t_m) \in Form_\Sigma$
 - ▶ Sonderfall: $t_1, t_2 \in Term_\Sigma$, dann $t_1 \doteq t_2 \in Form_\Sigma$

8 [16]

Freie und gebundene Variable

Definition (Freie und gebundene Variablen)

Variablen in $t \in \text{Term}, p \in \text{Form}$ sind **frei**, **gebunden**, oder **bindend**:

- (i) x **bindend** in $\forall x.\phi, \exists x.\psi$
- (ii) Für $\forall x.\phi$ und $\exists x.\phi$ ist x in Teilformel ϕ **gebunden**
- (iii) Ansonsten ist x **frei**

- ▶ $FV(\phi)$: Menge der freien Variablen in ϕ
- ▶ Beispiel:

$$(q(x) \vee \exists x.\forall y.p(f(x), z) \wedge q(a)) \vee \forall r(x, z, g(x))$$
- ▶ Formel (Term) s **geschlossen**, wenn $FV(s) = \emptyset$
- ▶ **Abschluss** einer Formel: $Cl(\phi) = \forall z_1 \dots z_k.\phi$ für $FV(\phi) = \{z_1, \dots, z_k\}$

9 [16]

Semantik: Strukturen

Definition (Struktur \mathfrak{A} zur Signatur Σ)

$\mathfrak{A} = (A, f, P)$ mit

- (i) A nicht-leere Menge (**Universum**)
- (ii) für $f \in \Sigma$ mit $ar(f) = n$, n -stellige Funktion $f_{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$
- (iii) für $P \in \Sigma$ mit $ar(P) = n$, n -stellige Relation $P_{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$

- ▶ Für $a \in A$, Konstante $\bar{a} \in \text{Term}_{\Sigma}$
- ▶ Damit Auswertung von **geschlossenen** Termen: $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathfrak{A}} : \text{Term}_{\Sigma} \rightarrow A$

$$\begin{aligned} \llbracket \bar{a} \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= a \\ \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= f_{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathfrak{A}}) \end{aligned}$$

10 [16]

Semantische Gültigkeit

- ▶ Auswertung von **Formeln**: $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathfrak{A}} : \text{Form}_{\Sigma} \rightarrow \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \llbracket \perp \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= 0 \\ \llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \min(\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}}) & \llbracket \neg \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= 1 - \llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} \\ \llbracket \phi \vee \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \max(\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}}) \\ \llbracket \phi \rightarrow \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \max(1 - \llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}}) \\ \llbracket \phi \leftrightarrow \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= 1 - |\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} - \llbracket \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 & \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathfrak{A}} \rangle \in P_{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \llbracket t_1 = t_2 \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 & \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathfrak{A}} = \llbracket t_2 \rrbracket_{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \llbracket \forall x.\phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \min(\{\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}) \\ \llbracket \exists x.\phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \max(\{\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}) \end{aligned}$$

- ▶ Damit **semantische Gültigkeit (Wahrheit)**:
 $\mathfrak{A} \models \phi$ gdw. $\llbracket Cl(\phi) \rrbracket_{\mathfrak{A}} = 1$, $\models \phi$ gdw. $\mathfrak{A} \models \phi$ für alle \mathfrak{A}

11 [16]

Syntaktische Gültigkeit: Natürliches Schließen

- ▶ Die alten Regeln blieben ($\rightarrow I, \rightarrow E, \wedge I, \wedge E, \vee I, \vee E, \neg I, \neg E, \text{raa}, \perp, \dots$)

- ▶ Mutatis mutandis: Form_{Σ} statt Prop
- ▶ Dazu benötigen wir Regeln für die Quantoren.
- ▶ Zu behandelnde **Probleme**:
 - ▶ Substitution
 - ▶ Bindung

12 [16]

Substitution

- ▶ $t[x]^{[s]}$ ist **Ersetzung** von x durch s in t
- ▶ Definiert durch strukturelle **Induktion**:

$$\begin{aligned} y[x]^{[s]} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s & x = y \\ y & x \neq y \end{cases} \\ f(t_1, \dots, t_n)[x]^{[s]} &\stackrel{\text{def}}{=} f(t_1[x]^{[s]}, \dots, t_n[x]^{[s]}) \\ \perp[x]^{[s]} &\stackrel{\text{def}}{=} \perp \\ (\phi \wedge \psi)[x]^{[s]} &\stackrel{\text{def}}{=} \phi[x]^{[s]} \wedge \psi[x]^{[s]} \\ (\phi \rightarrow \psi)[x]^{[s]} &\stackrel{\text{def}}{=} \phi[x]^{[s]} \rightarrow \psi[x]^{[s]} \\ P(t_1, \dots, t_n)[x]^{[s]} &\stackrel{\text{def}}{=} P(t_1[x]^{[s]}, \dots, t_n[x]^{[s]}) \\ (\forall y.\phi)[x]^{[s]} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \forall y.\phi & x = y \\ \forall y.(\phi[x]^{[s]}) & x \neq y, y \notin FV(s) \\ \forall z.((\phi[y]^{[z]})[x]^{[s]}) & x \neq y, y \in FV(s) \\ & \text{mit } z \notin FV(s) \cup FV(\phi) \\ & \text{(z frisch)} \end{cases} \end{aligned}$$

13 [16]

Natürliches Schließen mit Quantoren

$$\frac{\phi}{\forall x.\phi} \forall I \quad (*) \qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi[x]^{[t]}} \forall E \quad (\dagger)$$

- ▶ (*) **Eigenvariablenbedingung**:
 x nicht **frei** in offenen Vorbedingungen von ϕ (x beliebig)
- ▶ (\dagger) Ggf. **Umbenennung** durch Substitution
- ▶ **Gegenbeispiele** für verletzte Seitenbedingungen

14 [16]

Der Existenzquantor

$$\exists x.\phi \stackrel{\text{def}}{=} \neg \forall x.\neg \phi$$

$$\frac{\phi[x]^{[t]}}{\exists x.\phi} \exists I \quad (\dagger) \qquad \frac{\exists x.\phi \quad \psi}{\psi} \exists E \quad (*)$$

- ▶ (*) **Eigenvariablenbedingung**:
 x nicht frei in ψ , oder einer offeneren Vorbedingung außer ϕ
- ▶ (\dagger) Ggf. **Umbenennung** durch Substitution

15 [16]

Zusammenfassung

- ▶ **Prädikatenlogik**: Erweiterung der Aussagenlogik um
 - ▶ Konstanten- und Prädikatensymbole
 - ▶ Gleichheit
 - ▶ Quantoren
- ▶ Semantik der Prädikatenlogik: **Strukturen**
 - ▶ Bilden Operationen und Prädikate der Logik ab
- ▶ Das **natürliche Schließen** mit Quantoren
 - ▶ Variablenbindungen — Umbenennungen bei Substitution
 - ▶ Eigenvariablenbedingung
- ▶ Das nächste Mal: FOL at work, FOL in Isabelle
- ▶ Nächste VL: **Vollständigkeit**

16 [16]