Formale Modellierung
Vorlesung 5 vom 18.05.15: Eigenschaften der Prädikatenlogik erster Stufe

Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2015

Organisatorisches

- Die Übung am Donnerstag, 21.05.2015 fällt aus!

Fahrplan

- Teil I: Formale Logik
  - Einführung
  - Aussagenlogik (PL): Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
  - Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
  - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
  - FOL mit induktiven Datentypen
  - FOL mit rekursiven Definitionen
  - Logik höherer Stufe (HOL): Syntax und Eigenschaften
  - Berechungsmodelle (Models of Computation)
  - Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- Teil II: Spezifikation und Verifikation

Das Tagesmenü

- Wiederholung: natürliches Schließen mit FOL
- Regeln für die Gleichheit
- Beispiele: Graphen, natürliche Zahlen
- Vollständigkeit von FOL
- Unentscheidbarkeit von FOL

Natürliches Schließen mit Quantoren

$$\frac{\phi}{\forall x.\phi}\,\forall I\ (*) \qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi\left[\frac{t}{x}\right]}\,\forall E\ (\dagger)$$

- (*) Eigenvariablenbedingung:
  x nicht frei in offenen Vorbedingungen von ϕ (x beliebig)
- ($\dagger$) Ggf. Umbenennung durch Substitution
- Gegenbeispiele für verletzte Seitenbedingungen

Der Existenzquantor

$$\exists x.\phi \stackrel{def}{=} \neg\forall x.\neg\phi$$

$$\frac{\phi\left[\frac{t}{x}\right]}{\exists x.\phi}\,\exists I\ (\dagger) \qquad \frac{\exists x.\phi \quad \begin{matrix}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\psi}\,\exists E\ (*)$$

- (*) Eigenvariablenbedingung:
  x nicht frei in ψ, oder einer offenenen Vorbedingung außer ϕ
- ($\dagger$) Ggf. Umbenennung durch Substitution

Regeln für die Gleichheit

- Reflexivität, Symmetrie, Transitivität:

$$\frac{}{x \doteq x}\,\text{refl} \qquad \frac{x \doteq y}{y \doteq x}\,\text{sym} \qquad \frac{x \doteq y \quad y \doteq z}{x \doteq z}\,\text{trans}$$

- Kongruenz:

$$\frac{x_1 \doteq y_1, \ldots, x_n \doteq y_n}{f(x_1, \ldots, x_n) \doteq f(y_1, \ldots, y_n)}\,\text{cong}$$

- Substitutivität:

$$\frac{x_1 \doteq y_1, \ldots, x_m \doteq y_m \quad P(x_1, \ldots, x_m)}{P(y_1, \ldots, y_m)}\,\text{subst}$$

Wiederholung: Konsistenz und Vollständigkeit

- Korrektheit: wenn $\Gamma \vdash \phi$ dann $\Gamma \models \phi$
  - Beweis: Induktion über Struktur der Ableitung
- Konsistenz: wenn $\Gamma \models \phi$ dann $\Gamma \vdash \phi$
  - Beweis: Konstruktion der maximal konsistenten Theorie
  - Wenn Γ konsistent, gibt es Valuation die Γ wahr macht.
- Frage:Korrektheit und Konsistenz für Prädkatenlogik?

Korrektheit des natürlichen Schließens

Lemma 1 (Korrektheit von ND)
Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$

Beweis: Induktion über der Ableitung $\Gamma \vdash \phi$

- Neu hier: Fall $\forall x.\phi(x)$
- Beweis folgt durch Definition von $\mathfrak{A} \models \forall x.\phi(x)$

Vorbereitende Definitionen

Definition 2 (Theorien, Henkin-Theorien)
(i) Eine Theorie ist eine unter Ableitbarkeit geschlossene Menge $T \subseteq \mathcal{F}orm_\Sigma$
(ii) Henkin-Theorie: Für jedes $\exists x.\phi(x) \in T$ gibt es Witness c mit $\exists x.\phi(x) \longrightarrow \phi(c) \in T$

Definition 3
T' ist konservative Erweiterung von T wenn $T' \cap \Sigma(T) = T$

- Alle Theoreme in T' in der Sprache von T sind schon Theoreme in T
- Beispiel: $\wedge, \longrightarrow, \bot$ und volle Aussagenlogik

Lemma 4 (Konservative Erweiterung bewahrt Konsistenz)
T konsistent, T' konservative Erweiterung, dann T' konsistent.

Maximal konsistente Theorien

Definition 5
Sei T Theorie zur Signatur Σ:

$$\Sigma^* = \Sigma \cup \{c_\phi \mid \exists x.\phi(x) \in T\}$$
$$T^* = T \cup \{\exists x.\phi(x) \longrightarrow \phi(c_\phi) \mid \exists x.\phi(x) \text{ geschlossen }\}$$

Lemma 6
T^* konservative Erweiterung von T

Konstruktion maximal konsistenter Theorien

Lemma 7
Sei T Theorie, und seien
$$T_0 = T, T_{n+1} = T_n^*, T_\omega = \bigcup_{n \geq 0} T_n$$
Dann ist T_ω eine Henkin-Theorie und konservativ über T

Lemma 8 (Lindenbaum)
Jede konsistente Theorie ist in einer maximal konsistenten Theorie enthalten (Henkin-Erweiterung)

Vollständigkeit von ND

Lemma 9 (Existenz von Modellen)
Wenn Γ konsistent, dann hat Γ ein Modell.

- Beweis: Maximal konsistente Henkin-Erweiterung als Modell
- Herbrand-Modell, universelles Term-Modell
- Korrollar: Wenn $\Gamma \nvdash \phi$, dann $\Gamma \not\models \phi$

Theorem 10 (Vollständigkeit von ND)
$\Gamma \vdash \phi$ gdw. $\Gamma \models \phi$

Entscheidbarkeit

Theorem 11 (Kompaktheit)
Γ hat ein Modell gdw. jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ hat ein Modell

- Aus Vollständigkeit folgt nicht Entscheidbarkeit:

Theorem 12 (Church)
Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis:
- Kodierung eines unentscheidbaren Theorie in FOL
- Hier: Kodierung von Turing-Maschinen — konstruiere Formel U so dass $\vdash U$ gdw. Turing-Maschine M akzeptiert Eingabe w

Zusammenfassung

- Prädikatenlogik erster Stufe (FOL)
- Natürliches Schließen in FOL: Substitution und Eigenvariablenbedingung.
- FOL ist
  - konsistent,
  - vollständig,
  - aber nicht entscheidbar.