Formale Modellierung
Vorlesung 10 vom 19.06.14: Die Unvollständigkeitssätze von Gödel

Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2015

Fahrplan

- Teil I: Formale Logik
  - Einführung
  - Aussagenlogik (PL): Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
  - Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
  - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
  - FOL mit induktiven Datentypen
  - FOL mit rekursiven Definitionen
  - Logik höherer Stufe (HOL): Syntax und Eigenschaften
  - Berechungsmodelle (Models of Computation)
  - Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- Teil II: Spezifikation und Verifikation

Das Tagesmenü

- Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Jede konsistente Theorie, die hinreichend expressiv ist, um die natürlichen Zahlen zu formalisieren, erlaubt die Formulierung von wahren Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind.

- Zu jeder Formel φ gibt es eine natürliche Zahl, die diese Formel eindeutig kodiert $\lceil\varphi\rceil$
- Zu jedem ND-Beweis D für φ gibt es eine natürliche Zahl, die diesen Beweis eindeutig kodiert $\lceil D\rceil$
- Beweisbarkeit von φ in $\mathbb{N}$ ist als Prädikat $\mathrm{Provable}(\lceil\varphi\rceil)$ formalisierbar in PA
- Konstruktion einer Formel mit Aussage "Ich bin nicht beweisbar" $\varphi \longleftrightarrow \neg\,\mathrm{Prov}(\lceil\varphi\rceil)$

Gödel-Kodierung

- Folgende Funktion ist definierbar in PA:
$$(n, m) \stackrel{def}{=} 2^n \cdot 3^m$$
- Es gibt eindeutige Projektionen (ebenfalls definierbar in PA):
$$\mathrm{Left}((n, m)) = n \qquad \mathrm{Right}((n, m)) = m$$
- Kodierung von Sequenzen (p_k ist die k-te Primzahl):
$$\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle \stackrel{def}{=} 2^{n_0+1} \cdot 3^{n_1+1} \cdot 5^{n_2+1} \cdots p_k^{n_{k-1}+1}$$
- Alternative Definition nach Cantor:
$$(n, m) = \frac{n + m^2 + 3x + 2y}{2}$$

Gödel-Kodierung für Terme

Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, Variablen X

- Variablen $x_1, x_2, \cdots \in X$:
$$\lceil x_i\rceil \stackrel{def}{=} (0, i)$$
- Funktionen $f_1, \cdots \in \mathcal{F}$:
$$\lceil f_i\rceil \stackrel{def}{=} (1, i)$$
- Terme
$$\lceil f_i(t_1, \ldots t_n)\rceil \stackrel{def}{=} \langle\lceil f_i\rceil, \lceil t_1\rceil, \ldots \lceil t_n\rceil\rangle$$

Gödel-Kodierung für Formeln

Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, Variablen X

- Prädikate $p_1, \cdots \in \mathcal{P}$, $\bot \stackrel{def}{=} p_1$, $\doteq \stackrel{def}{=} p_2$
$$\lceil p_i\rceil \stackrel{def}{=} (2, i)$$
- Atome
$$\lceil p_i(t_1, \ldots t_n)\rceil \stackrel{def}{=} \langle\lceil p_i\rceil, \lceil t_1\rceil, \ldots \lceil t_n\rceil\rangle$$
- Konnektive und Quantoren
$$\lceil\neg\rceil = (3, 1), \lceil\wedge\rceil = (3, 2), \lceil\vee\rceil = (3, 3)$$
$$\lceil\longrightarrow\rceil = (3, 4), \lceil\longleftrightarrow\rceil = (3, 5), \lceil\forall\rceil = (3, 6), \lceil\exists\rceil = (3, 7)$$

Gödel-Kodierung für Formeln II

Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, Variablen X

- $\lceil\neg\varphi\rceil = (\lceil\neg\rceil, \lceil\varphi\rceil)$
- $\lceil\psi \diamond \varphi\rceil = \langle\lceil\diamond\rceil, \lceil\psi\rceil, \lceil\varphi\rceil\rangle$ mit $\diamond \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$
- $\lceil Q\ x_i.\, \varphi\rceil = \langle\lceil Q\rceil, \lceil x_i\rceil, \lceil\varphi\rceil\rangle$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$

Lemma 1 (Eigenschaften der Gödel-Kodierung)

- *Sei $G \stackrel{def}{=} \{\lceil\varphi\rceil | \varphi$ Variable, Term, oder Formel $\}$*
- *G ist entscheidbar*
- *$\lfloor n\rfloor = \varphi :\Leftrightarrow \lceil\varphi\rceil = n$ ist eindeutig definiert auf G*
- *Substitutionsfunktion $\mathrm{subst}(n, x, t) = m$ definierbar auf G*
$$\lceil\varphi[t/x]\rceil = \mathrm{subst}(\lceil\varphi\rceil, \lceil x\rceil, \lceil t\rceil)$$

Gödel-Kodierung für Ableitungen

- Gödel Kodierung für Hypothesen Liste:

$$\ulcorner[\varphi_1,\dots,\varphi_n]\urcorner = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ \langle(4,\ulcorner\varphi_1\urcorner),\dots,(4,\ulcorner\varphi_n\urcorner)\rangle & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

$$n \in h \Leftrightarrow \begin{cases} \bot & \text{if } h = 1 \\ \top & \text{if } h = (4,n) \vee h = ((4,n),m) \\ n \in m & \text{if } h = ((4,q),m), \neg(q = n) \end{cases}$$

- Definition von Konkatenation $*$ und Streichen von Hypothesen

Gödel-Kodierung für Ableitungen

$$\left\ulcorner \frac{\begin{matrix} D_1 & D_2 \\ \phi & \psi \end{matrix}}{\phi \wedge \psi} \wedge I \right\urcorner = \langle(5,\ulcorner\wedge\urcorner), \left\ulcorner \begin{matrix} D_1 \\ \phi \end{matrix} \right\urcorner, \left\ulcorner \begin{matrix} D_2 \\ \psi \end{matrix} \right\urcorner, \ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner\rangle$$

$$\left\ulcorner \frac{\begin{matrix} D \\ \phi \wedge \psi \end{matrix}}{\phi} \wedge E_L \right\urcorner = \langle(6,\ulcorner\wedge\urcorner), \left\ulcorner \begin{matrix} D \\ \phi \wedge \psi \end{matrix} \right\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner\rangle$$

Gödel-Kodierung für Ableitungen

$$\left\ulcorner \frac{\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}}{\phi \longrightarrow \psi} \longrightarrow I \right\urcorner = \langle(5,\ulcorner\longrightarrow\urcorner), \left\ulcorner \begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix} \right\urcorner, \ulcorner\phi\longrightarrow\psi\urcorner\rangle$$

$$\left\ulcorner \frac{\begin{matrix} D_1 & D_2 \\ \phi & \phi \longrightarrow \psi \end{matrix}}{\psi} \longrightarrow E \right\urcorner = \langle(6,\ulcorner\longrightarrow\urcorner), \left\ulcorner \begin{matrix} D_1 \\ \phi \end{matrix} \right\urcorner, \left\ulcorner \begin{matrix} D_2 \\ \phi \longrightarrow \psi \end{matrix} \right\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle$$

Gödel-Kodierung für Ableitungen

- Entsprechend für RAA, $\forall I$, $\forall E$
- Definiere $\mathrm{Der}(p,h,z)$: $\lfloor p\rfloor$ ist Beweis für $\lfloor z\rfloor$ aus Hypothesen $\lfloor h\rfloor$

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Der}(p,h,z) \overset{def}{=} (4,z) \in h & & \text{Hypothese} \\
\quad \vee \ \exists p_1, h_1, z_1, p_2, h_2, z_2. & & \wedge I \\
\quad\quad \mathrm{Der}(p_1,h_1,z_1) \wedge \mathrm{Der}(p_2,h_2,z_2) \wedge & & \\
\quad\quad h = h_1 * h_2 \wedge & & \\
\quad\quad p = \langle(5,\ulcorner\wedge\urcorner), p_1, p_2, \ulcorner\lfloor z_1\rfloor \wedge \lfloor z_2\rfloor\urcorner\rangle & & \\
\quad \vee \ \exists p_1, h_1, z_1, u. & & \longrightarrow I \\
\quad\quad \mathrm{Der}(p_1,h_1,z_1) \wedge & & \\
\quad\quad h = \mathrm{Streiche}(u,h_1) \wedge & & \\
\quad\quad p = \langle(5,\ulcorner\longrightarrow\urcorner), p_1, \ulcorner\lfloor u\rfloor \longrightarrow \lfloor z_2\rfloor\urcorner\rangle & & \\
\quad \dots & &
\end{array}$$

Beweisbarkeit

- Peano-Axiome + Erweiterung: PA Sei $Ax : \mathbb{N}$ Prädikat

$$Ax(n) \longleftrightarrow \bigvee_{\varphi\in PA} n = \ulcorner\varphi\urcorner$$

- $\mathrm{Prov}(p,f)$: p is Gödelnummer eines ND-Beweis für $\lfloor f\rfloor$

$$\mathrm{Prov}(p,f) \Leftrightarrow \exists h.(\mathrm{Der}(p,h,f) \wedge \forall g.g \in h \Rightarrow Ax(g))$$

- $\mathrm{Thm}(f)$: $\lfloor f\rfloor$ ist ein Theorem

$$\mathrm{Thm}(f) \longleftrightarrow \exists p.\,\mathrm{Prov}(p,f)$$

Fixpunkt-Theorem

Theorem 2 (Fixpoint Theorem)

For each formula $\varphi(x)$ with only one free variable x there exists a formula ψ such that $\vdash \varphi(\ulcorner\psi\urcorner) \longleftrightarrow \psi$

Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Jede konsistente Theorie, die hinreichend expressiv ist, um PA zu formalisieren erlaubt die Formulierung von wahren Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind.

- Fixpunktsatz anwenden auf $\varphi(x) \overset{def}{=} \neg\mathrm{Thm}(x)$
- Es gibt ψ so dass $\vdash \psi \longleftrightarrow \neg\mathrm{Thm}(\ulcorner\psi\urcorner)$
  - Gödel sentence: "Ich bin nicht beweisbar"
- Es gilt **PA** $\models \psi \longleftrightarrow \neg\mathrm{Thm}(\ulcorner\psi\urcorner)$
- Annahme: **PA** $\vdash \psi$, dann **PA** $\models \mathrm{Thm}(\ulcorner\psi\urcorner)$

$$\begin{array}{ll}
\Leftrightarrow \mathbf{PA} \models \exists x.\,\mathrm{Prov}(x,\ulcorner\psi\urcorner) & \Leftrightarrow \mathbf{PA} \models \mathrm{Prov}(n,\ulcorner\psi\urcorner) \text{ for some } n \\
\Leftrightarrow \vdash \mathrm{Prov}(n,\ulcorner\psi\urcorner) \text{ for some } n & \Leftrightarrow \vdash \psi \\
\Rightarrow \vdash \neg\mathrm{Thm}(\ulcorner\psi\urcorner) & \Rightarrow \mathbf{PA} \models \neg\mathrm{Thm}(\ulcorner\psi\urcorner)
\end{array}$$

- Widerspruch — also ist ψ wahr in **PA**, aber **PA** $\nvdash \psi$

Zusammenfassung

Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Jede konsistente Theorie, die hinreichend expressiv ist, um die Peano-Arithmetik (**PA**) zu formalisieren, ist entweder konsistent oder unvollständig (erlaubt die Formulierung von wahren Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind).

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

When **PA** konsistent ist, können wir die Konsistenz von **PA** nicht herleiten (**PA** $\nvdash Consis_{\mathbf{PA}}$).

- Beweis durch Kodierung von Formeln und Ableitbarkeit in **PA**
- Reflektion der Beweisbarkeit in einer Formel
- Konstruktion einer Formel mit der Aussage "Ich bin nicht beweisbar"