Formale Modellierung
Vorlesung 3 vom 27.04.15: Konsistenz und Vollständigkeit der Aussagenlogik

Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2015

Fahrplan

- Teil I: Formale Logik
  - Einführung
  - Aussagenlogik (PL): Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
  - Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
  - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
  - FOL mit induktiven Datentypen
  - FOL mit rekursiven Definitionen
  - Logik höherer Stufe (HOL): Syntax und Eigenschaften
  - Berechungsmodelle (Models of Computation)
  - Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- Teil II: Spezifikation und Verifikation

Das Tagesmenü

- Eigenschaften der Aussagenlogik (PL)
- $\Gamma \vdash \phi$ vs. $\Gamma \models \phi$:
  - Korrektheit
  - Konsistenz
  - Vollständigkeit

Eigenschaften der Aussagenlogik

- $\mathcal{P}rop$ bildet eine Boolesche Algebra:

$$\models (\phi \vee \psi) \vee \sigma \longleftrightarrow \phi \vee (\psi \vee \sigma)$$

$$\models (\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \longleftrightarrow \phi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

$$\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \psi \vee \phi$$

$$\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \psi \wedge \phi$$

$$\models \phi \vee (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma)$$

$$\models \phi \wedge (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)$$

$$\models \neg(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$$

$$\models \neg(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$$

$$\models \phi \vee \phi \longleftrightarrow \phi$$

$$\models \phi \wedge \phi \longleftrightarrow \phi$$

$$\models \neg\neg\phi \longleftrightarrow \phi$$

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Rechnen in $\mathcal{P}rop$:
  - Substitutivität:
    wenn $\models \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$, dann $\models \psi\left[\begin{smallmatrix}\phi_1\\ p\end{smallmatrix}\right] \longleftrightarrow \psi\left[\begin{smallmatrix}\phi_2\\ p\end{smallmatrix}\right]$ für Atom p.
  - Sei $\phi \approx \psi$ gdw. $\models \phi \longleftrightarrow \psi$, dann ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation
- Damit: algebraisches Umformen als Beweisprinzip
  - Beispiele: $\models (\phi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \sigma)) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi \longrightarrow \sigma)$
    $\models \phi \longrightarrow \psi \longrightarrow \phi$
- Anwendung: konjunktive und disjunktive Normalformen (CNF/DNF)

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Operatoren durch andere definierbar:

$$\models (\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$
$$\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)$$
$$\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow (\neg\phi \longrightarrow \psi)$$
$$\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$
$$\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$
$$\models \neg\phi \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \bot)$$
$$\models \bot \longleftrightarrow (\phi \wedge \neg\phi)$$
$$\models \top \longleftrightarrow (\phi \vee \neg\phi)$$

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Operatoren durch andere definierbar:

$$
\begin{aligned}
&\models (\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \psi) \land (\psi \longrightarrow \phi)\\
&\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \lor \psi)\\
&\models \phi \lor \psi \longleftrightarrow (\neg\phi \longrightarrow \psi)\\
&\models \phi \lor \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \land \neg\psi)\\
&\models \phi \land \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \lor \neg\psi)\\
&\models \neg\phi \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \bot)\\
&\models \bot \longleftrightarrow (\phi \land \neg\phi)\\
&\models \top \longleftrightarrow (\phi \lor \neg\phi)
\end{aligned}
$$

- $(\land, \neg)$ und $(\lor, \bot)$ sind ausreichend (functional complete)
- Ein Operator reicht: $A \mid B$ (Sheffer-Strich), $A \downarrow B$ (weder-noch)

Korrektheit (Soundness)

- $\Gamma \vdash \phi$: Ableitbarkeit
- $\Gamma \models \phi$: semantische 'Wahrheit'
- Ist alles wahr, was wir ableiten können? (Korrektheit)
- Ist alles ableitbar, was wahr ist? (Vollständigkeit)

Korrektheit (Soundness)

- $\Gamma \vdash \phi$: Ableitbarkeit
- $\Gamma \models \phi$: semantische 'Wahrheit'
- Ist alles wahr, was wir ableiten können? (Korrektheit)
- Ist alles ableitbar, was wahr ist? (Vollständigkeit)

Theorem 1 (Korrektheit von ND in der Aussagenlogik)

Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$

Beweis: Induktion über der Ableitung $\Gamma \vdash \phi$

- Nützliches Korollar: $\Gamma \not\models \phi$ dann $\Gamma \nvdash \phi$

Konsistenz

- Nur konsistente Logiken (Mengen von Aussagen) sind sinnvoll.

Definition 2 (Konsistenz)

Menge Γ von Aussagen konsistent gdw. $\Gamma \nvdash \bot$

Lemma 3 (Charakterisierung von Konsistenz)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Γ *konsistent*

(ii) *Es gibt kein* ϕ *so dass* $\Gamma \vdash \phi$ *und* $\Gamma \vdash \neg\phi$

(iii) *Es gibt ein* ϕ *so dass* $\Gamma \nvdash \phi$

Konsistenz

- Nur konsistente Logiken (Mengen von Aussagen) sind sinnvoll.

Definition 2 (Konsistenz)

Menge Γ von Aussagen konsistent gdw. $\Gamma \nvdash \perp$

Lemma 3 (Charakterisierung von Konsistenz)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iv) Γ *inkonsistent* ($\Gamma \vdash \perp$)

(v) *Es gibt ein* ϕ *so dass* $\Gamma \vdash \phi$ *und* $\Gamma \vdash \neg\phi$

(vi) *Für alle* ϕ, $\Gamma \vdash \phi$

Maximale Konsistenz

- Wenn es v gibt so dass $[\![\psi]\!]_v = 1$ für $\psi \in \Gamma$, dann Γ konsistent.

Definition 4 (Maximale Konsistenz)

Γ maximal konsistent gdw.

(i) Γ konsistent, und

(ii) wenn $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und Γ' konsistent, dann $\Gamma = \Gamma'$

Lemma 5 (Konstruktion maximal konsistenter Mengen)

Für jedes konsistente Γ gibt es maximal konsistentes Γ^* mit $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

Eigenschaften maximal konsistenter Mengen

- Wenn $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent, dann $\Gamma \vdash \neg\phi$ (Beweis: $\neg I$)
- Wenn $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ inkonsistent, dann $\Gamma \vdash \phi$ (Beweis: raa)

Lemma 6

Wenn Γ maximal konsistent, dann geschlossen unter Ableitbarkeit: $\Gamma \vdash \phi$ dann $\phi \in \Gamma$.

- Wenn Γ maximal konsistent ist, dann:

(i) entweder $\phi \in \Gamma$ oder $\neg\phi \in \Gamma$

(ii) $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ gdw. $\phi, \psi \in \Gamma$

(iii) $\phi \longrightarrow \psi \in \Gamma$ gdw. (wenn $\phi \in \Gamma$ dann $\psi \in \Gamma$)

Vollständigkeit

Lemma 7

Wenn Γ konsistent, dann gibt es v so dass $[\![\phi]\!]_v = 1$ für $\phi \in \Gamma$.

Damit:

- Wenn $\Gamma \nvdash \phi$ dann gibt es v so dass $[\![\psi]\!]_v = 1$ für $\psi \in \Gamma$, $[\![\phi]\!]_v = 0$.
- Wenn $\Gamma \nvdash \phi$ dann $\Gamma \not\models \phi$.

Theorem 8 (Vollständigkeit von ND in der Aussagenlogik)

Wenn $\Gamma \models \phi$, dann $\Gamma \vdash \phi$

- Aus Entscheidbarkeit von $\models$ folgt Entscheidbarkeit von $\vdash$

Zusammenfassung

- Aussagenlogik ist eine Boolesche Algebra.
  - Äquivalenzumformung als Beweisprinzip
- Aussagenlogik und natürliches Schließen sind korrekt und vollständig.
  - Beweis der Vollständigkeit: maximale Konsistenz
  - Konstruktion des Herbrand-Modells, Aufzählung aller (wahren, ableitbaren) Aussagen
- Ausagenlogik ist entscheidbar: für Γ und ϕ, $\Gamma \vdash \phi$ oder $\Gamma \nvdash \phi$.
- Nächste VL: Prädikatenlogik