# Formale Modellierung
# Vorlesung 5 vom 18.05.15: Eigenschaften der Prädikatenlogik erster Stufe

Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2015

# Organisatorisches

- Die Übung am Donnerstag, 21.05.2015 fällt aus!

# Fahrplan

- Teil I: Formale Logik
  - Einführung
  - Aussagenlogik (PL): Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
  - Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
  - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
  - FOL mit induktiven Datentypen
  - FOL mit rekursiven Definitionen
  - Logik höherer Stufe (HOL): Syntax und Eigenschaften
  - Berechungsmodelle (Models of Computation)
  - Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- Teil II: Spezifikation und Verifikation

# Das Tagesmenü

- Wiederholung: natürliches Schließen mit FOL
- Regeln für die Gleichheit
- Beispiele: Graphen, natürliche Zahlen
- Vollständigkeit von FOL
- Unentscheidbarkeit von FOL

# Natürliches Schließen mit Quantoren

$$\frac{\phi}{\forall x.\phi}\ \forall I\ \ (*) \qquad\qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi\left[{t \atop x}\right]}\ \forall E\ \ (\dagger)$$

- (*) Eigenvariablenbedingung:
  $x$ nicht frei in offenen Vorbedingungen von $\phi$ ($x$ beliebig)
- (†) Ggf. Umbenennung durch Substitution
- Gegenbeispiele für verletzte Seitenbedingungen

# Der Existenzquantor

$$\exists x.\phi \overset{def}{=} \neg\forall x.\neg\phi$$

$$\frac{\phi\begin{bmatrix}t\\x\end{bmatrix}}{\exists x.\phi}\ \exists I\ \ (\dagger) \qquad\qquad \frac{\exists x.\phi \qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\ \exists E\ \ (*)$$

- (*) Eigenvariablenbedingung:
  $x$ nicht frei in $\psi$, oder einer offenenen Vorbedingung außer $\phi$
- (†) Ggf. Umbenennung durch Substitution

# Regeln für die Gleichheit

- Reflexivität, Symmetrie, Transitivität:

$$\frac{}{x \doteq x}\ \text{refl} \qquad \frac{x \doteq y}{y \doteq x}\ \text{sym} \qquad \frac{x \doteq y \quad y \doteq z}{x \doteq z}\ \text{trans}$$

- Kongruenz:

$$\frac{x_1 \doteq y_1, \ldots, x_n \doteq y_n}{f(x_1, \ldots, x_n) \doteq f(y_1, \ldots, y_n)}\ \text{cong}$$

- Substitutivität:

$$\frac{x_1 \doteq y_1, \ldots, x_m \doteq y_m \quad P(x_1, \ldots, x_m)}{P(y_1, \ldots, y_m)}\ \text{subst}$$

# Wiederholung: Konsistenz und Vollständigkeit

- Korrektheit: wenn $\Gamma \vdash \phi$ dann $\Gamma \models \phi$
  - Beweis: Induktion über Struktur der Ableitung
- Konsistenz: wenn $\Gamma \models \phi$ dann $\Gamma \vdash \phi$
  - Beweis: Konstruktion der maximal konsistenten Theorie
  - Wenn $\Gamma$ konsistent, gibt es Valuation die $\Gamma$ wahr macht.
- Frage:Korrektheit und Konsistenz für Prädkatenlogik?

# Korrektheit des natürlichen Schließens

**Lemma 1 (Korrektheit von ND)**

*Wenn* $\Gamma \vdash \phi$, *dann* $\Gamma \models \phi$

Beweis: Induktion über der Ableitung $\Gamma \vdash \phi$

- Neu hier: Fall $\forall x.\phi(x)$

- Beweis folgt durch Definition von $\mathfrak{A} \models \forall x.\phi(x)$

# Vorbereitende Definitionen

**Definition 2 (Theorien, Henkin-Theorien)**

(i) Eine Theorie ist eine unter Ableitbarkeit geschlossene Menge $T \subseteq \mathcal{F}orm_\Sigma$

(ii) Henkin-Theorie: Für jedes $\exists x.\phi(x) \in T$ gibt es Witness $c$ mit $\exists x.\phi(x) \longrightarrow \phi(c) \in T$

**Definition 3**

$T'$ ist konservative Erweiterung von $T$ wenn $T' \cap \Sigma(T) = T$

- Alle Theoreme in $T'$ in der Sprache von $T$ sind schon Theoreme in $T$
- Beispiel: $\wedge, \longrightarrow, \perp$ und volle Aussagenlogik

**Lemma 4 (Konservative Erweiterung bewahrt Konsistenz)**

*$T$ konsistent, $T'$ konservative Erweiterung, dann $T'$ konsistent.*

# Maximal konsistente Theorien

**Definition 5**

Sei $T$ Theorie zur Signatur $\Sigma$:

$$\Sigma^* = \Sigma \cup \{c_\phi \mid \exists x.\phi(x) \in T\}$$
$$T^* = T \cup \{\exists x.\phi(x) \longrightarrow \phi(c_\phi) \mid \exists x.\phi(x) \text{ geschlossen }\}$$

**Lemma 6**

*$T^*$ konservative Erweiterung von $T$*

# Konstruktion maximal konsistenter Theorien

**Lemma 7**

*Sei $T$ Theorie, und seien*

$$T_0 = T, T_{n+1} = T_n^*, T_\omega = \bigcup_{n \geq 0} T_n$$

*Dann ist $T_\omega$ eine Henkin-Theorie und konservativ über $T$*

**Lemma 8 (Lindenbaum)**

*Jede konsistente Theorie ist in einer maximal konsistenten Theorie enthalten (Henkin-Erweiterung)*

# Vollständigkeit von ND

**Lemma 9 (Existenz von Modellen)**

*Wenn* $\Gamma$ *konsistent, dann hat* $\Gamma$ *ein Modell.*

- Beweis: Maximal konsistente Henkin-Erweiterung als Modell
- Herbrand-Modell, universelles Term-Modell
- Korrollar: Wenn $\Gamma \nvdash \phi$, dann $\Gamma \not\models \phi$

**Theorem 10 (Vollständigkeit von ND)**

$\Gamma \vdash \phi$ *gdw.* $\Gamma \models \phi$

# Entscheidbarkeit

**Theorem 11 (Kompaktheit)**

$\Gamma$ *hat ein Modell gdw. jede endliche Teilmenge* $\Delta \subseteq \Gamma$ *hat ein Modell*

- Aus Vollständigkeit folgt nicht Entscheidbarkeit:

**Theorem 12 (Church)**

*Prädikatenlogik ist unentscheidbar.*

Beweis:

- Kodierung eines unentscheidbaren Theorie in FOL
- Hier: Kodierung von Turing-Maschinen — konstruiere Formel $U$ so dass $\vdash U$ gdw. Turing-Maschine $M$ akzeptiert Eingabe $w$

# Zusammenfassung

- Prädikatenlogik erster Stufe (FOL)
- Natürliches Schließen in FOL: Substitution und Eigenvariablenbedingung.
- FOL ist
  - konsistent,
  - vollständig,
  - aber nicht entscheidbar.