

2. Übungsblatt

Ausgabe: 11.05.15

Abgabe: 25.05.15

In diesem Übungsblatt beginnen wir mit dem Beweisen mit Hilfe des Beweisassistentensystems Isabelle. Das Isabelle System finden Sie unter <http://isabelle.in.tum.de/> für verschiedene Betriebssysteme. Eine Einführung sowie Verweise auf ein Tutorial und ein Handbuch finden Sie unter

<http://isabelle.in.tum.de/overview.html>.

Zur Bearbeitung des Übungsblattes finden Sie auf der Webseite der Vorlesung die Definition der Aussagenlogik in der Datei `VSPL.thy` und `VSFOL.thy`. Die Beweise für die Aufgaben 2.1 und 2.2 werden in die Dateien `Uebung2.thy` eingefügt, die auch auf der Webseite der Vorlesung zu finden ist; für die Aufgabe 2.3 legen Sie eine neue Datei an.

2.1 Einfache Beweise in Isabelle

5 Punkte

Formalisieren Sie die folgenden Beweise im Kalkül des natürlichen Schließens im Beweisassistentensystem Isabelle.

(A1a.) Beweis für $\vdash A \wedge \perp \longleftrightarrow \perp$

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge \perp]}{\perp} \wedge E_2}{A \wedge \perp \longrightarrow \perp} \longrightarrow I \quad \frac{\frac{[\perp]}{A \wedge \perp} \perp}{\perp \longrightarrow A \wedge \perp} \longrightarrow I}{A \wedge \perp \longleftrightarrow \perp} \longleftrightarrow I$$

(A1b.) Beweis für $\vdash A \wedge (A \vee B) \longleftrightarrow A$:

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge (A \vee B)]}{A} \wedge E_1}{A \wedge (A \vee B) \longrightarrow A} \longrightarrow I \quad \frac{\frac{[A]}{A \vee B} \vee I_L}{A \wedge (A \vee B)} \wedge I}{A \wedge (A \vee B) \longrightarrow A} \longrightarrow I \quad \frac{}{A \longrightarrow A \wedge (A \vee B)} \longrightarrow I}{A \wedge (A \vee B) \longleftrightarrow A} \longleftrightarrow I$$

2.2 Beweisen in Isabelle

10 Punkte

Beweisen Sie die folgenden Aussagen im Beweissystem Isabelle:

(A2a) $\vdash \varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow (\varphi \wedge \psi))$

(A2b) $\neg \varphi \vdash (\varphi \longrightarrow \neg \psi)$

(A2c) $\neg(\varphi \wedge \neg \psi), \varphi \vdash \psi$

(A2d) $\vdash (\varphi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$

2.3 Vom Umgang mit Quantoren

5 Punkte

Zeigen Sie folgendes Lemma in Isabelle:

$$(\exists x.\phi(x) \wedge \psi) \longleftrightarrow (\exists x.\phi(x)) \wedge \psi \quad x \notin FV(\psi)$$

Hinweise:

- (i) Formulieren Sie zuerst das Lemma in Isabelle.
- (ii) Der Beweis wird übersichtlicher, wenn beide Richtungen der Äquivalenz als getrennte Lemmata gezeigt werden.
- (iii) Entscheidend für das Gelingen des Beweises in Isabelle ist es, zum richtigen Zeitpunkt die Quantoren in Vorbedingung und Konklusion zu eliminieren, damit die Eigenvariablenbedingung (ausgedrückt durch den „Meta-Allquantor“ $\forall x. A \ x$) die geeignete Instanttierung zulässt.
- (iv) Der Beweis von rechts nach links wird einfacher, wenn das Lemma in der Form $[| A; B |] \implies C$ statt $A \ \& \ B \ \longrightarrow C$ formuliert wird.
- (v) Wenn Ihnen der Beweis in Isabelle nicht gelingt, versuchen Sie zuerst eine Herleitung als ND-Baum.