Formale Modellierung SoSe 13

Serge Autexier
Christoph Lüth

1. Übungsblatt

Ausgabe: 11.04.13
Abgabe: 29.04.13

1.1 *Formale Aussagen* *4 Punkte*

Formalisieren Sie die folgenden Sätze in Aussagenlogik. Definieren Sie die aussagenlogischen Konstanten und geben anschließend die aussagenlogischen Sätze an:

(a) Flug ZZ345 stürzte ab, weil das Flugzeug vom Blitz getroffen wurde.

(b) Wenn Flug ZZ345 nicht vom Blitz getroffen worden wäre, dann wäre er pünktlich gewesen.

(c) Der Zug von Hannover nach Bremen ist meistens pünktlich, außer es gibt einen Schaden an der Lok oder Bauarbeiten am Bahnhof in Hannover.

(d) Entweder werden die CO_2-Emissionen reduziert, oder es gibt mehr Überschwemmungen. Leider werden die CO_2-Emissionen nicht gekürzt. Deshalb gibt es mehr Überschwemmungen.

1.2 *Formale Beweise* *6 Punkte*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen jeweils im Kalkül des natürlichen Schließen:

(a) $\vdash \varphi \longrightarrow \varphi$

(b) $\vdash \varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow (\varphi \wedge \psi))$

(c) $\neg\varphi \vdash (\varphi \longrightarrow \neg\psi)$

(d) $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$

(e) $\vdash (\varphi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

1.3 *Das Einhorn* *4 Punkte*

> *"Wenn das Einhorn ein Fabelwesen ist, dann ist es unsterblich. Aber wenn es kein Fabelwesen ist, ist es ein sterbliches Säugetier. Wenn das Einhorn entweder unsterblich oder ein Säugetier ist, dann hat es ein Horn. Das Einhorn ist magisch, wenn es ein Horn hat."*

Formalisiere diese Aussagen, und beweise oder widerlege damit als Annahmen folgende Aussagen:

(a) Das Einhorn ist ein Fabelwesen.

(b) Das Einhorn ist magisch.

(c) Das Einhorn hat ein Horn.

Hinweis: Die in der Übung bewiesene Aussage $\vdash \phi \vee \neg\phi$ könnte hilfreich sein, und kann verwendet werden.

$\boxed{1.4}$ *Resolution* *6 Punkte*

Wenn C eine aussagenlogische Konstante ist, dann sind C und $\neg C$ *aussagenlogische Literale*. Eine *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen, also im Allgemeinen der Form $[L_1, L_2, \dots L_n]$, wobei die L_i aussagenlogische Literale sind. Eine Klausel wird *disjunktiv* interpretiert, d.h. eine Klausel $[L_1, L_2, \dots L_n]$ entspricht der Disjunktion $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n]$. Die *leere Klausel* $[]$ entspricht somit der leeren Disjunktion und ist ein Widerspruch, also $\perp$. Betrachten Sie folgende Schlußregel für Klauseln:

$$\frac{[C, L_1, \dots, L_k] \quad [\neg C, L_{k+1}, \dots, L_{k+n}]}{[L_1, \dots, L_{k+n}]} \; \textit{Resolution}$$

Die in der Konklusion erhaltene Klausel $[L_1, \dots, L_{k+n}]$ nennt man auch die *Resolvente* der Elternklauseln $[C, L_1, \dots, L_k]$ und $[\neg C, L_{k+1}, \dots, L_{k+n}]$.

(a) Beweisen Sie die Korrektheit der *Resolutionsregel*. Zeigen Sie dafür, daß wenn die Prämissen wahr sind unter einer Interpretation $[\![.]\!]_v$, dann ist auch die Konklusion wahr unter $[\![.]\!]_v$.

(b) Die Resolutionsregel ist eine Beweisregel für aussagenlogische Klauseln: Um zu zeigen, daß eine aussagenlogische Aussage $L_1 \wedge \dots \wedge L_n$ (L_i Literale) aus einer Klauselmenge Φ folgt, muß aus der Klauselmenge $\Phi \cup \{[\neg L_1, \dots, \neg L_n]\}$ durch endliche viele Anwendungen der Resolutionsregel die leere Klausel $[]$ abgeleitet werden. Dabei verhält sich die Negation auf Literalen wie folgt, wobei L ein Literal und C eine aussagenlogische Konstante: $\neg L := \begin{cases} C & \text{if } L = \neg C \\ \neg C & \text{if } L = C. \end{cases}$

Dabei dürfen auch erhaltene Resolventen als Elternklauseln dienen werden. Als Beispiel betrachten wir folgende Ableitung der leeren Klausel aus den Klauseln $[\neg A, B]$, $[\neg B, C]$, $[\neg C, \neg D]$, $[D]$, $[A]$:

1. $[\neg A, B]$	Axiom
2. $[\neg B, C]$	Axiom
3. $[\neg C, \neg D]$	Axiom
4. $[D]$	Axiom
5. $[A]$	Axiom
6. $[\neg A, C]$	Resolve 1. & 2.
7. $[C]$	Resolve 6. & 5.
8. $[\neg D]$	Resolve 7. & 3.
9. $[]$	Resolve 8. & 4.

qed

Formalisieren Sie den Sachverhalt von Aufgabe 4 in Klauselform. Beachten Sie dabei, daß Implikationen $\varphi \longrightarrow \psi$ äquivalent sind zu $\neg\varphi \vee \psi$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mittels Resolution, daß das Einhorn ein Fabelwesen ist.