Formale Modellierung
Vorlesung 3 vom 15.04.13: Aussagenlogik: Konsistenz & Vollständigkeit

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2013

Organisatorisches

Vorlesung und Übung nächste Woche (22.04, 25.04.) fallen aus!

Fahrplan

- Teil I: Formale Logik
  - Einführung
  - Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
  - Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
  - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
  - FOL mit induktiven Datentypen
  - FOL mit Induktion und Rekursion
  - Die Gödel-Theoreme
  - Weitere Datentypen: Mengen, Multimengen, Punkte
- Teil II: Spezifikation und Verifikation
- Teil III: Schluß

Das Tagesmenü

- Einige Eigenschaften der Aussagenlogik (PL)
- $\Gamma \vdash \phi$ vs. $\Gamma \models \phi$:
  - Korrektheit
  - Konsistenz
  - Vollständigkeit

Eigenschaften der Aussagenlogik

- *Prop* bildet eine Boolesche Algebra:

$$
\begin{aligned}
&\models (\phi \vee \psi) \vee \sigma \longleftrightarrow \phi \vee (\psi \vee \sigma)\\
&\models (\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \longleftrightarrow \phi \wedge (\psi \wedge \sigma)\\
&\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \psi \vee \phi\\
&\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \psi \wedge \phi\\
&\models \phi \vee (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma)\\
&\models \phi \wedge (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)\\
&\models \neg(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi\\
&\models \neg(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi\\
&\models \phi \vee \phi \longleftrightarrow \phi\\
&\models \phi \wedge \phi \longleftrightarrow \phi\\
&\models \neg\neg\phi \longleftrightarrow \phi
\end{aligned}
$$

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Rechnen in *Prop*:
  - Substitutivität: wenn $\models \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$, dann $\models \psi\left[\begin{smallmatrix}\phi_1\\ p\end{smallmatrix}\right] \longleftrightarrow \psi\left[\begin{smallmatrix}\phi_2\\ p\end{smallmatrix}\right]$ für Atom p.
  - Sei $\phi \approx \psi$ gdw. $\models \phi \longleftrightarrow \psi$, dann ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation
- Damit: algebraisches Umformen als Beweisprinzip
  - Beispiele: $\models (\phi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \sigma)) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi \longrightarrow \sigma)$
    $\models \phi \longrightarrow \psi \longrightarrow \phi$

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Operatoren durch andere definierbar:

$$
\begin{aligned}
&\models (\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)\\
&\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)\\
&\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow (\neg\phi \longrightarrow \psi)\\
&\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\\
&\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)\\
&\models \neg\phi \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \bot)\\
&\models \bot \longleftrightarrow (\phi \wedge \neg\phi)
\end{aligned}
$$

- $(\wedge, \neg)$ und $(\vee, \bot)$ sind genug (functional complete)
- Anwendung: konjunktive und disjunktive Normalformen (CNF/DNF)
- Gleichfalls: $A \mid B$ (Sheffer-Strich), $A \downarrow B$ (weder-noch)

Korrektheit (Soundness)

- $\Gamma \vdash \phi$: Ableitbarkeit
- $\Gamma \models \phi$: semantische 'Wahrheit'
- Ist alles wahr, was wir ableiten können? (Korrektheit)
- Ist alles ableitbar, was wahr ist? (Vollständigkeit)

Lemma 1 (Korrektheit von ND)
Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$

Beweis: Induktion über der Ableitung $\Gamma \vdash \phi$

Konsistenz

- Nur konsistente Logiken (Mengen von Aussagen) sind sinnvoll

Definition 2 (Konsistenz)
Menge Γ von Aussagen konsistent gdw. $\Gamma \not\vdash \bot$

Lemma 3 (Charakterisierung von Konsistenz)
Folgende Aussagen sind äquivalent:
(i) Γ *konsistent*
(ii) *Es gibt kein* ϕ *so dass* $\Gamma \vdash \phi$ *und* $\Gamma \vdash \neg\phi$
(iii) *Es gibt ein* ϕ *so dass* $\Gamma \not\vdash \phi$

(iv) Γ *inkonsistent* ($\Gamma \vdash \bot$)
(v) *Es gibt ein* ϕ *so dass* $\Gamma \vdash \phi$ *und* $\Gamma \vdash \neg\phi$
(vi) *Für alle* ϕ, $\Gamma \vdash \phi$

Maximale Konsistenz

- Wenn es v so dass $[\![\psi]\!]_v = 1$ für $\psi \in \Gamma$, dann Γ konsistent.

Definition 4 (Maximale Konsistenz)
Γ maximal konsistent gdw.
(i) Γ konsistent, und
(ii) wenn $\Gamma \Subset \Gamma'$ und Γ' konsistent, dann $\Gamma = \Gamma'$

Lemma 5 (Konstruktion maximal konsistenter Mengen)
Für jedes konsistente Γ *gibt es maximal konsistentes* Γ^* *mit* $\Gamma \Subset \Gamma^*$

Eigenschaften maximal konsistenter Mengen

- Wenn $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent, dann $\Gamma \vdash \neg\phi$ (Beweis: $\neg I$)
- Wenn $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ inkonsistent, dann $\Gamma \vdash \phi$ (Beweis: raa)

Lemma 6
Wenn Γ *maximal konsistent, dann geschlossen unter Ableitbarkeit:*
$\Gamma \vdash \phi$ *dann* $\phi \in \Gamma$.

- Wenn Γ maximal konsistent ist, dann:

(i) entweder $\phi \in \Gamma$ oder $\neg\phi \in \Gamma$
(ii) $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ gdw. $\phi, \psi \in \Gamma$
(iii) $\phi \longrightarrow \psi \in \Gamma$ gdw. (wenn $\phi \in \Gamma$ dann $\psi \in \Gamma$)

Vollständigkeit

Lemma 7
Wenn Γ *konsistent, dann gibt es* v *so dass* $[\![\phi]\!]_v = 1$ *für* $\phi \in \Gamma$.

Damit:
- Wenn $\Gamma \not\vdash \phi$ dann gibt es v so dass $[\![\psi]\!]_v = 1$ für $\psi \in \Gamma$, $[\![\phi]\!]_v = 0$.
- Wenn $\Gamma \not\vdash \phi$ dann $\Gamma \not\models \phi$.

Theorem 8 (Vollständigkeit der Aussagenlogik)
$\Gamma \vdash \phi$ *gdw.* $\Gamma \models \phi$

- Deshalb: Aussagenlogik entscheidbar

Zusammenfassung

- Aussagenlogik ist eine Boolesche Algebra.
  - Äquivalenzumformung als Beweisprinzip
- Aussagenlogik und natürliches Schließen sind korrekt und vollständig.
  - Beweis der Vollständigkeit: maximale Konsistenz
  - Konstruktion des Herbrand-Modells, Aufzählung aller (wahren, ableitbaren) Aussagen
- Ausagenlogik ist entscheidbar: für Γ und ϕ, $\Gamma \vdash \phi$ oder $\Gamma \not\vdash \phi$.
- Nächste VL (29.04.13): Prädikatenlogik