

Formale Modellierung
Vorlesung 3 vom 15.04.13: Aussagenlogik: Konsistenz &
Vollständigkeit

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2013

Organisatorisches

Vorlesung und Übung **nächste Woche** (22.04, 25.04.) fallen aus!

Fahrplan

- ▶ Teil I: Formale Logik
 - ▶ Einführung
 - ▶ Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
 - ▶ Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
 - ▶ FOL mit induktiven Datentypen
 - ▶ FOL mit Induktion und Rekursion
 - ▶ Die Gödel-Theoreme
 - ▶ Weitere Datentypen: Mengen, Multimengen, Punkte
- ▶ Teil II: Spezifikation und Verifikation
- ▶ Teil III: Schluß

Das Tagesmenü

- ▶ Einige Eigenschaften der Aussagenlogik (PL)
- ▶ $\Gamma \vdash \phi$ vs. $\Gamma \models \phi$:
 - ▶ Korrektheit
 - ▶ Konsistenz
 - ▶ Vollständigkeit

Eigenschaften der Aussagenlogik

- \mathcal{Prop} bildet eine **Boolesche Algebra**:

$$\models (\phi \vee \psi) \vee \sigma \longleftrightarrow \phi \vee (\psi \vee \sigma)$$

$$\models (\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \longleftrightarrow \phi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

$$\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \psi \vee \phi$$

$$\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \psi \wedge \phi$$

$$\models \phi \vee (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma)$$

$$\models \phi \wedge (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)$$

$$\models \neg(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$$

$$\models \neg(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$$

$$\models \phi \vee \phi \longleftrightarrow \phi$$

$$\models \phi \wedge \phi \longleftrightarrow \phi$$

$$\models \neg\neg\phi \longleftrightarrow \phi$$

Eigenschaften der Aussagenlogik

- ▶ Rechnen in *Prop*:

- ▶ **Substitutivität:**

wenn $\models \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$, dann $\models \psi[\phi_1] \longleftrightarrow \psi[\phi_2]$ für Atom p .

- ▶ Sei $\phi \approx \psi$ gdw. $\models \phi \longleftrightarrow \psi$, dann ist \approx eine **Äquivalenzrelation**

- ▶ Damit: algebraisches **Umformen** als **Beweisprinzip**

- ▶ Beispiele: $\models (\phi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \sigma)) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi \longrightarrow \sigma)$
 $\models \phi \longrightarrow \psi \longrightarrow \phi$

Eigenschaften der Aussagenlogik

- ▶ Operatoren durch andere definierbar:

$$\models (\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$

$$\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)$$

$$\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow (\neg\phi \longrightarrow \psi)$$

$$\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\models \neg\phi \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \perp)$$

$$\models \perp \longleftrightarrow (\phi \wedge \neg\phi)$$

Eigenschaften der Aussagenlogik

- ▶ Operatoren durch andere definierbar:

$$\models (\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$

$$\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)$$

$$\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow (\neg\phi \longrightarrow \psi)$$

$$\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\models \neg\phi \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \perp)$$

$$\models \perp \longleftrightarrow (\phi \wedge \neg\phi)$$

- ▶ (\wedge, \neg) und (\vee, \perp) sind **genug** (functional complete)
- ▶ Anwendung: konjunktive und disjunktive **Normalformen** (CNF/DNF)
- ▶ Gleichfalls: $A \mid B$ (Sheffer-Strich), $A \downarrow B$ (weder-noch)

Korrektheit (Soundness)

- ▶ $\Gamma \vdash \phi$: Ableitbarkeit
- ▶ $\Gamma \models \phi$: semantische 'Wahrheit'
- ▶ Ist alles **wahr**, was wir **ableiten** können? (**Korrektheit**)
- ▶ Ist alles **ableitbar**, was **wahr** ist? (**Vollständigkeit**)

Korrektheit (Soundness)

- ▶ $\Gamma \vdash \phi$: Ableitbarkeit
- ▶ $\Gamma \models \phi$: semantische 'Wahrheit'
- ▶ Ist alles wahr, was wir ableiten können? (Korrektheit)
- ▶ Ist alles ableitbar, was wahr ist? (Vollständigkeit)

Lemma 1 (Korrektheit von ND)

Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$

Beweis: Induktion über der Ableitung $\Gamma \vdash \phi$

Konsistenz

- ▶ Nur konsistente Logiken (Mengen von Aussagen) sind **sinnvoll**

Definition 2 (Konsistenz)

Menge Γ von Aussagen **konsistent** gdw. $\Gamma \not\vdash \perp$

Lemma 3 (Charakterisierung von Konsistenz)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Γ konsistent
- (ii) Es gibt kein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$
- (iii) Es gibt ein ϕ so dass $\Gamma \not\vdash \phi$

Konsistenz

- ▶ Nur konsistente Logiken (Mengen von Aussagen) sind **sinnvoll**

Definition 2 (Konsistenz)

Menge Γ von Aussagen **konsistent** gdw. $\Gamma \not\vdash \perp$

Lemma 3 (Charakterisierung von Konsistenz)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (iv) Γ inkonsistent ($\Gamma \vdash \perp$)
- (v) Es gibt ein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$
- (vi) Für alle ϕ , $\Gamma \vdash \phi$

Maximale Konsistenz

- ▶ Wenn es v so dass $\llbracket \psi \rrbracket_v = 1$ für $\psi \in \Gamma$, dann Γ konsistent.

Definition 4 (Maximale Konsistenz)

Γ **maximal konsistent** gdw.

- (i) Γ konsistent, und
- (ii) wenn $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und Γ' konsistent, dann $\Gamma = \Gamma'$

Lemma 5 (Konstruktion maximal konsistenter Mengen)

Für jedes konsistente Γ gibt es **maximal** konsistentes Γ^* mit $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

Eigenschaften maximal konsistenter Mengen

- ▶ Wenn $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent, dann $\Gamma \vdash \neg\phi$ (Beweis: $\neg I$)
- ▶ Wenn $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ inkonsistent, dann $\Gamma \vdash \phi$ (Beweis: *raa*)

Lemma 6

Wenn Γ maximal konsistent, dann *geschlossen* unter Ableitbarkeit:
 $\Gamma \vdash \phi$ dann $\phi \in \Gamma$.

- ▶ Wenn Γ maximal konsistent ist, dann:
 - (i) entweder $\phi \in \Gamma$ oder $\neg\phi \in \Gamma$
 - (ii) $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ gdw. $\phi, \psi \in \Gamma$
 - (iii) $\phi \longrightarrow \psi \in \Gamma$ gdw. (wenn $\phi \in \Gamma$ dann $\psi \in \Gamma$)

Vollständigkeit

Lemma 7

Wenn Γ konsistent, dann gibt es v so dass $\llbracket \phi \rrbracket_v = 1$ für $\phi \in \Gamma$.

Damit:

- ▶ Wenn $\Gamma \not\vdash \phi$ dann gibt es v so dass $\llbracket \psi \rrbracket_v = 1$ für $\psi \in \Gamma$, $\llbracket \phi \rrbracket_v = 0$.
- ▶ Wenn $\Gamma \not\vdash \phi$ dann $\Gamma \not\models \phi$.

Theorem 8 (Vollständigkeit der Aussagenlogik)

$\Gamma \vdash \phi$ gdw. $\Gamma \models \phi$

- ▶ Deshalb: Aussagenlogik **entscheidbar**

Zusammenfassung

- ▶ Aussagenlogik ist eine **Boolesche Algebra**.
 - ▶ Äquivalenzumformung als **Beweisprinzip**
- ▶ Aussagenlogik und natürliches Schließen sind **korrekt** und **vollständig**.
 - ▶ Beweis der Vollständigkeit: maximale Konsistenz
 - ▶ Konstruktion des **Herbrand-Modells**, Aufzählung aller (wahren, ableitbaren) Aussagen
- ▶ Aussagenlogik ist **entscheidbar**: für Γ und ϕ , $\Gamma \vdash \phi$ oder $\Gamma \not\vdash \phi$.
- ▶ Nächste VL (**29.04.13**): Prädikatenlogik