Formale Modellierung
Vorlesung 4 vom 29.04.13: Prädikatenlogik erster Stufe

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2013

Fahrplan

- Teil I: Formale Logik
  - Einführung
  - Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
  - Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
  - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
  - FOL mit induktiven Datentypen
  - FOL mit Induktion und Rekursion
  - Die Gödel-Theoreme
  - Weitere Datentypen: Mengen, Multimengen, Punkte
- Teil II: Spezifikation und Verifikation
- Teil III: Schluß

Das Tagesmenü

- Von Aussagenlogik zur Prädikatenlogik
- Logik mit Quantoren
- Semantik der Prädikatenlogik
- Natürliches Schließen mit Quantoren

Beispiel: Make

The make utility automatically determines which pieces of a large program need to be recompiled, and issues commands to recompile them.

- Abhängigkeiten werden durch Regeln formalisiert
- Wenn Ziel älter ist als Abhängigkeit wird es neu erzeugt.

```
lecture-01.pdf: lecture-01.tex prelude.sty
        pdflatex lecture-01.tex

lecture-02.pdf: lecture-02.tex prelude.sty diagram.pdf
        pdflatex lecture-02.tex

diagram.pdf: diagram.svg
        inkscape -A diagram.pdf diagram.svg
```

Prädikatenlogik: Erweiterung der Sprache

- Terme beschreiben die zu formalisierenden Objekte.
- Formeln sind logische Aussagen.
- Eine Signatur Σ beschreibt Prädikate und Funktionen:
  - Prädikatensymbole: $P_1, \ldots, P_n, \doteq$ mit Arität $ar(P_i) \in \mathbb{N}$, $ar(\doteq) = 2$
  - Funktionssymbole: $f_1, \ldots, f_m$ mit Arität $ar(t_i) \in \mathbb{N}$
- Menge X von Variablen (abzählbar viele)
- Konnektive: $\wedge, \longrightarrow, \bot, \forall$, abgeleitet: $\vee, \longleftrightarrow, \neg, \longleftrightarrow, \exists$

Terme

- Menge $\mathcal{T}erm_\Sigma$ der Terme (zur Signatur Σ) gegeben durch:
  - Variablen: $X \Subset \mathcal{T}erm_\Sigma$
  - Funktionssymbol $f \in \Sigma$ mit $ar(f) = n$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}erm_\Sigma$, dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}erm_\Sigma$
  - Sonderfall: $n = 0$, dann ist f eine Konstante, $f \in \mathcal{T}erm_\Sigma$

Formeln

- Menge $\mathcal{F}orm_\Sigma$ der Formeln (zur Signatur Σ) gegeben durch:
  - $\bot \in \mathcal{F}orm_\Sigma$
  - Wenn $\phi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$, dann $\neg\phi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$
  - Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma, \quad \phi \vee \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma,$
    $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma, \quad \phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$

Formeln

- Menge $\mathcal{F}orm_\Sigma$ der Formeln (zur Signatur Σ) gegeben durch:
  - $\bot \in \mathcal{F}orm_\Sigma$
  - Wenn $\phi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$, dann $\neg\phi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$
  - Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma, \quad \phi \vee \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma,$ $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma, \quad \phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$
  - Wenn $\phi \in \mathcal{F}orm_\Sigma, x \in X$, dann $\forall x.\phi \in \mathcal{F}orm_\Sigma, \exists x.\phi \in \mathcal{F}orm_\Sigma$
  - Prädikatensymbol $p \in \Sigma$ mit $ar(p) = m$ und $t_1, \ldots, t_m \in \mathcal{T}erm$, dann $p(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{F}orm_\Sigma$
    - Sonderfall: $t_1, t_2 \in \mathcal{T}erm_\Sigma$, dann $t_1 \doteq t_2 \in \mathcal{F}orm_\Sigma$

Freie und gebundene Variable

Definition (Freie und gebundene Variablen)

Variablen in $t \in \mathcal{T}erm, p \in \mathcal{F}orm$ sind frei, gebunden, oder bindend:

(i) x bindend in $\forall x.\phi$, $\exists x.\psi$

(ii) Für $\forall x.\phi$ und $\exists x.\phi$ ist x in Teilformel ϕ gebunden

(iii) Ansonsten ist x frei

- $FV(\phi)$: Menge der freien Variablen in ϕ
- Beispiel:
$$(q(x) \vee \exists x.\forall y.p(f(x), z) \wedge q(a)) \vee \forall r(x, z, g(x))$$
- Formel (Term) s geschlossen, wenn $FV(s) = \emptyset$
- Abschluss einer Formel: $Cl(\phi) = \forall z_1 \ldots z_k.\phi$ für $FV(\phi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$

Semantik: Strukturen

Definition (Struktur $\mathfrak{A}$ zur Signatur Σ)

$\mathfrak{A} = (A, f, P)$ mit

(i) A nicht-leere Menge (Universum)

(ii) für $f \in \Sigma$ mit $ar(f) = n$, n-stellige Funktion $f_{\mathfrak{A}} : A^n \to A$

(iii) für $P \in \Sigma$ mit $ar(P) = n$, n-stellige Relation $P_{\mathfrak{A}} \Subset A^n$

- Für $a \in A$, Konstante $\overline{a} \in \mathcal{T}erm_\Sigma$
- Damit Auswertung von geschlossenen Termen: $[\![\cdot]\!]_{\mathfrak{A}} : \mathcal{T}erm_\Sigma \to A$

$$[\![\overline{a}]\!]_{\mathfrak{A}} = a$$
$$[\![f(t_1, \ldots, t_n]\!]_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]_{\mathfrak{A}}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A}})$$

Semantische Gültigkeit

- Auswertung von Formeln: $[\![\cdot]\!]_{\mathfrak{A}} : \mathcal{F}orm_\Sigma \to \{0,1\}$

$$
\begin{aligned}
[\![\bot]\!]_{\mathfrak{A}} &= 0 & [\![\neg\phi]\!]_{\mathfrak{A}} &= 1 - [\![\phi]\!]_{\mathfrak{A}} \\
[\![\phi \wedge \psi]\!]_{\mathfrak{A}} &= \min([\![\phi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) & [\![\phi \vee \psi]\!]_{\mathfrak{A}} &= \max([\![\phi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\phi \longrightarrow \psi]\!]_{\mathfrak{A}} &= \max(1 - [\![\phi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) \\
[\![\phi \longleftrightarrow \psi]\!]_{\mathfrak{A}} &= 1 - |[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A}} - [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 & \langle [\![t_1]\!]_{\mathfrak{A}}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A}} \rangle \in P_{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![t_1 \doteq t_2]\!]_{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 & [\![t_1]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![t_2]\!]_{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![\forall x.\phi]\!]_{\mathfrak{A}} &= \min(\{[\![\phi\left[\tfrac{\overline{a}}{x}\right]]\!]_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}) \\
[\![\exists x.\phi]\!]_{\mathfrak{A}} &= \max(\{[\![\phi\left[\tfrac{\overline{a}}{x}\right]]\!]_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\})
\end{aligned}
$$

- Damit semantische Gültigkeit (Wahrheit):

$$\mathfrak{A} \models \phi \text{ gdw. } [\![Cl(\phi)]\!]_{\mathfrak{A}} = 1, \models \phi \text{ gdw. } \mathfrak{A} \models \phi \text{ für alle } \mathfrak{A}$$

Substitution

- $t\left[{s \atop x}\right]$ ist Ersetzung von x durch s in t
- Definiert durch strukturelle Induktion:

$$
\begin{aligned}
y\left[{s \atop x}\right] &\stackrel{def}{=} \begin{cases} s & x = y \\ y & x \neq y \end{cases} \\
f(t_1, \ldots, t_n)\left[{s \atop x}\right] &\stackrel{def}{=} f(t_1\left[{s \atop x}\right], \ldots, t_n\left[{s \atop x}\right]) \\
\bot\left[{s \atop x}\right] &\stackrel{def}{=} \bot \\
(\phi \wedge \psi)\left[{s \atop x}\right] &\stackrel{def}{=} \phi\left[{s \atop x}\right] \wedge \psi\left[{s \atop x}\right] \\
(\phi \longrightarrow \psi)\left[{s \atop x}\right] &\stackrel{def}{=} \phi\left[{s \atop x}\right] \longrightarrow \psi\left[{s \atop x}\right] \\
P(t_1, \ldots, t_n)\left[{s \atop x}\right] &\stackrel{def}{=} P(t_1\left[{s \atop x}\right], \ldots, t_n\left[{s \atop x}\right])
\end{aligned}
$$

Substitution

- $t\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}$ ist Ersetzung von x durch s in t
- Definiert durch strukturelle Induktion:

$$
\begin{aligned}
y\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} &\overset{def}{=} \begin{cases} s & x = y \\ y & x \neq y \end{cases} \\
f(t_1, \ldots, t_n)\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} &\overset{def}{=} f(t_1\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}, \ldots, t_n\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}) \\
\bot\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} &\overset{def}{=} \bot \\
(\phi \wedge \psi)\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} &\overset{def}{=} \phi\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} \wedge \psi\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} \\
(\phi \longrightarrow \psi)\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} &\overset{def}{=} \phi\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} \longrightarrow \psi\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} \\
P(t_1, \ldots, t_n)\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} &\overset{def}{=} P(t_1\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}, \ldots, t_n\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}) \\
(\forall y.\phi)\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix} &\overset{def}{=} \begin{cases} \forall y.\phi & x = y \\ \forall y.(\phi\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}) & x \neq y, y \notin FV(s) \\ \forall z.((\phi\begin{bmatrix}z\\y\end{bmatrix})\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}) & x \neq y, y \in FV(s) \\ & \quad \text{mit } z \notin FV(s) \cup FV(\phi) \\ & \quad (z \text{ frisch}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Natürliches Schließen mit Quantoren

$$\frac{\phi}{\forall x.\phi}\ \forall I\ \ (*) \qquad\qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi\left[{t \atop x}\right]}\ \forall E\ \ (\dagger)$$

- (*) Eigenvariablenbedingung:
  x nicht frei in offenen Vorbedingungen von ϕ (x beliebig)
- ($\dagger$) Ggf. Umbenennung durch Substitution
- Gegenbeispiele für verletzte Seitenbedingungen

Der Existenzquantor

$$\exists x.\phi \stackrel{def}{=} \neg\forall x.\neg\phi$$

$$\frac{\phi\left[\begin{smallmatrix} t \\ x \end{smallmatrix}\right]}{\exists x.\phi}\ \exists I\ \ (\dagger) \qquad\qquad \frac{\exists x.\phi \qquad \begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\ \exists E\ \ (*)$$

- (*) Eigenvariablenbedingung:
  x nicht frei in ψ, oder einer offenenen Vorbedingung außer ϕ
- (†) Ggf. Umbenennung durch Substitution

Zusammenfassung

- Prädikatenlogik: Erweiterung der Aussagenlogik um
  - Konstanten- und Prädikatensymbole
  - Gleichheit
  - Quantoren
- Semantik der Prädikatenlogik: Strukturen
  - Bilden Operationen und Prädikate der Logik ab
- Das natürliche Schließen mit Quantoren
  - Variablenbindungen — Umbenennungen bei Substitution
  - Eigenvariablenbedingung
- Das nächste Mal: Vollständigkeit und natürliche Zahlen