Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 6 vom 14.05.17: Korrektheit der Floyd-Hoare-Logik

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2017

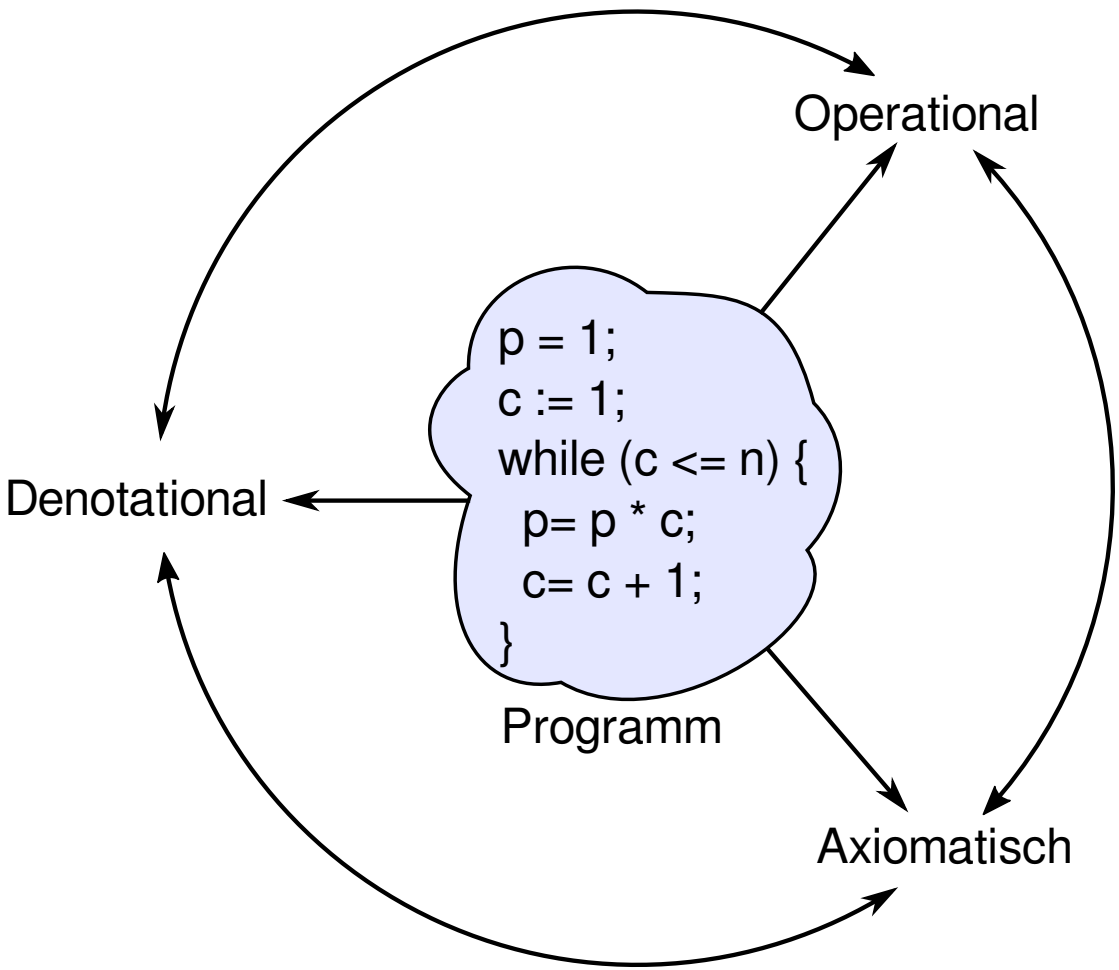
Fahrplan

- Einführung
- Die Floyd-Hoare-Logik
- Operationale Semantik
- Denotationale Semantik
- Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik
- Korrektheit des Hoare-Kalküls
- Vorwärts und Rückwärts mit Floyd und Hoare
- Funktionen und Prozeduren
- Referenzen und Speichermodelle
- Verifikationsbedingungen Revisited
- Vorwärtsrechnung Revisited
- Programmsicherheit und Frame Conditions
- Ausblick und Rückblick

Motivation

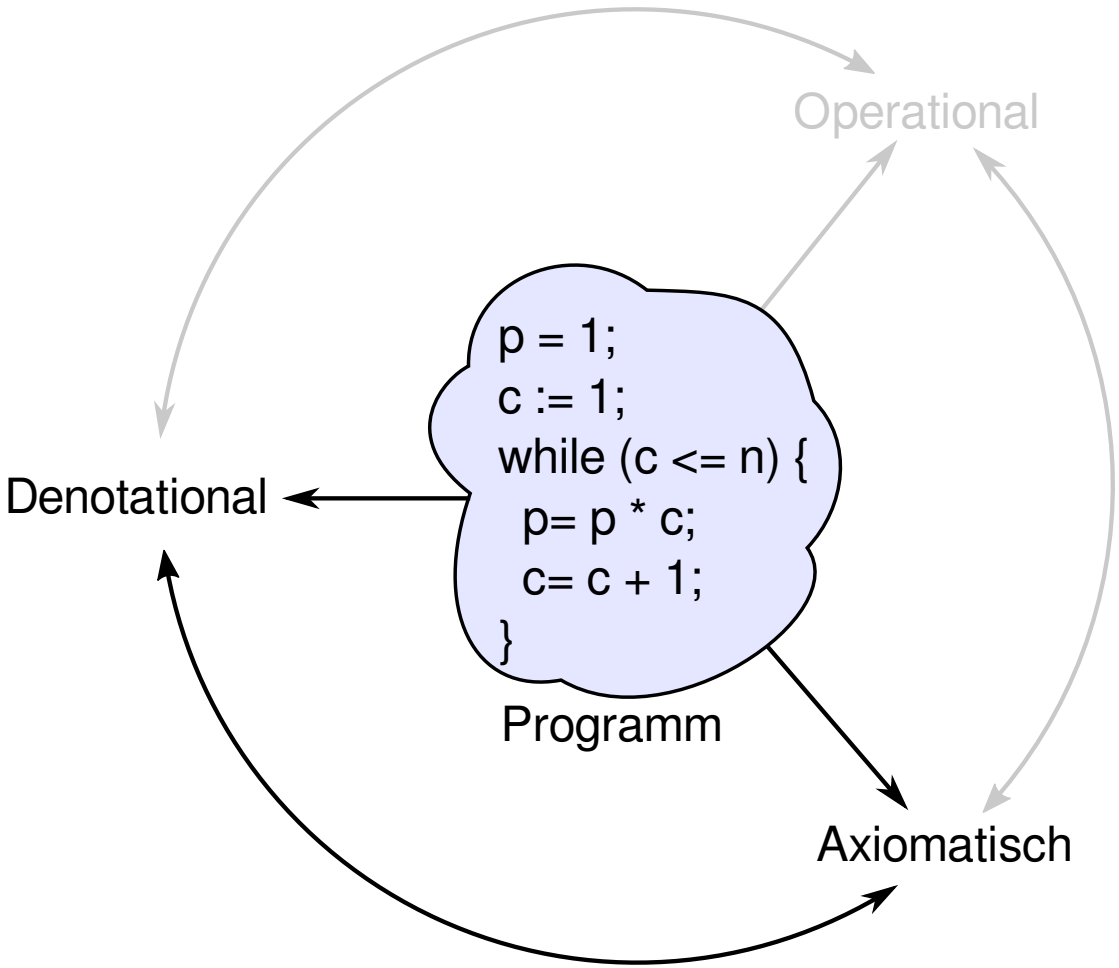
- In den letzten Wochen: **Semantik**
- Warum?
  - Bedeutung von Programmen mathematisch präzise fassen,
  - um insbesondere die über die Korrektheit von Programmen zu reden.
- Fragen:
  1. Was bedeutet es, wenn ein Programm korrekt ist?
  2. Wie können wir das beweisen?

Was gibt es heute?



- Denotationale Semantik: plausible mathematische Formulierung des Ausführungsbegriffs für Programme
- Floyd-Hoare-Logik: Herleitung von Eigenschaften von Programmen
- Aber: gelten diese Eigenschaften auch?
- Dazu müssen Floyd-Hoare-Logik und denotationale Semantik übereinstimmen.

Was gibt es heute?



- Denotationale Semantik: plausible mathematische Formulierung des Ausführungsbegriffs für Programme
- Floyd-Hoare-Logik: Herleitung von Eigenschaften von Programmen
- Aber: gelten diese Eigenschaften auch?
- Dazu müssen Floyd-Hoare-Logik und denotationale Semantik übereinstimmen.

Denotionale Semantik

- Denotat eines Ausdrucks (Programms) ist partielle Funktion:

$$\mathcal{A}[\![-]\!] : \mathbf{Aexp} \to \Sigma \rightharpoonup \mathbf{N}$$

$$\mathcal{B}[\![-]\!] : \mathbf{Bexp} \to \Sigma \rightharpoonup \mathbf{T}$$

$$\mathcal{C}[\![-]\!] : \mathbf{Stmt} \to \Sigma \rightharpoonup \Sigma$$

- $f : A \rightharpoonup B$, dann ($\perp$ steht für "undefiniert"):

$$\mathrm{def}(f(x)) \iff f(x) \neq \perp$$

Floyd-Hoare-Tripel: Gültigkeit und Herleitbarkeit

$P, Q \in \mathbf{Bexp}, c \in \mathbf{Stmt}$

$\models \{P\}\, c\, \{Q\}$ "Hoare-Tripel gilt" (semantisch)

$\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$ "Hoare-Tripel herleitbar" (syntaktisch)

Remember:

Partielle Korrektheit ($\models \{P\}\, c\, \{Q\}$)

c ist partiell korrekt, wenn für alle Zustände σ, die P erfüllen:
wenn die Ausführung von c mit σ in σ' terminiert, **dann** erfüllt σ' Q

Bezug zur Semantik?

Hoare-Tripel und denotationale Semantik

- Mit der denotationalen Semantik können wir die Gültigkeit von Hoare-Tripeln formal definieren.
- Notation: für $P \in \mathbf{Bexp}$, $\sigma \models P \iff \mathcal{B}[\![P]\!](\sigma) = 1$

Gültigkeit von Hoare-Tripeln

$$\models \{P\}\, c\, \{Q\} \iff \forall \sigma \in \Sigma.\, \sigma \models P \wedge \mathsf{def}(\mathcal{C}[\![c]\!](\sigma)) \Longrightarrow \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \models Q$$

- Aber: $\models \{P\}\, c\, \{Q\} \quad \overset{?}{\rightsquigarrow} \quad \vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$

Überblick: die Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls

$$\frac{}{\vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

$$\frac{}{\vdash \{A\}\, \{\}\, \{A\}} \qquad \frac{\vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad \vdash \{B\}\, \{c_s\}\, \{C\}}{\vdash \{A\}\, \{c\ c_s\}\, \{C\}}$$

$$\frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \vdash \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

$$\frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{while}(b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}} \qquad \frac{A' \Longrightarrow A \qquad \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad B \Longrightarrow B'}{\vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$

Korrektheit und Vollständigkeit

- Korrektheit: $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\} \stackrel{?}{\Longrightarrow} \models \{P\}\, c\, \{Q\}$
  - Wir können nur gültige Eigenschaften von Programmen herleiten.
- Vollständigkeit: $\models \{P\}\, c\, \{Q\} \stackrel{?}{\Longrightarrow} \vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$
  - Wir können alle gültigen Eigenschaften auch herleiten.

Korrektheit der Floyd-Hoare-Logik

Floyd-Hoare-Logik ist korrekt.

Wenn $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$, dann $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$.

Beweis:

- Durch strukturelle Induktion über der Herleitung von $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$
- Bsp: Sequenz, Zuweisung, Weakening, While.

Vollständigkeit der Floyd-Hoare-Logik

Floyd-Hoare-Logik ist vollständig modulo weakening.

Wenn $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$, dann $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$ bis auf die Bedingungen der Weakening-Regel.

- Beweis durch Konstruktion der schwächsten Vorbedingung $\mathrm{wp}(c, Q)$.
- Wenn wir eine gültige Zusicherung nicht herleiten können, liegt das nur daran, dass wir eine Beweisverpflichtung nicht beweisen können.
- Logik erster Stufe ist unvollständig, also können wir gar nicht besser werden.

Zusammenfassung

- Die Gültigkeit von Hoare-Tripeln ist ein semantisches Konzept, und über die denotationale Semantik definiert.
- Das Verhältnis von denotationaler Semantik zur Floyd-Hoare-Logik ist also die Frage nach Korrektheit und Vollständigkeit.
- Floyd-Hoare-Logik ist korrekt, wir können nur gültige Zusicherungen herleiten.
- Floyd-Hoare-Logik ist vollständig bis auf das Weakening.