Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 10 vom 23.06.20
Modellierung und Spezifikation

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2020

Fahrplan

Beispiel: Suche nach dem maximalen Element

```
1  // {0 < n}
2  i= 0;
3  r= 0;
4  while (i< n) {
5    if (a[r] < a[i]) {
6      r= i;
7      }
8    else {
9      }
10   i= i+1;
11   // {(∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ i ≤ n ∧ 0 ≤ r < n}
12   }
13 // {(∀j. 0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n}
```


Beispiel: Sortierte Felder

- Wie formulieren wir, dass ein Array sortiert ist? Ggf. bis zu einem bestimmten Punkt n sortiert ist?

```
int a[8];
// {∀j. 0 ≤ j ≤ n < 8. a[j] ≤ a[j+1]}
```

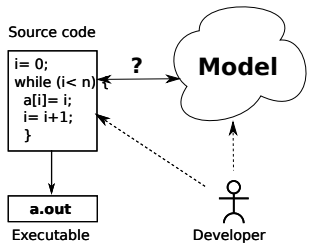
- Alternativ würden man auch gerne ein Prädikat definieren können

```
//{∀a. sorted(a, 0) ⟷ true}
//{∀a ∀i. i ≥ 0 ⟶ (sorted(a, i+1) ⟷ (a[i] ≤ a[i+1] ∧ sorted(a, i)))}
```

- ... und damit beweisen dass:

```
//{∀a ∀n. sorted(a, n) ⟶ ∀i, j. 0 ≤ i ≤ j ≤ n ⟶ a[i] ≤ a[j]}
```


Generelles Problem: Modellbildung



Modell ist **abstrakte** Repräsentation:

- Verhalten des Programmes kann kürzer beschrieben werden
- Einfachere Beweise

Modell ist **treue** Repräsentation:

- Eigenschaften des Modelles gelten auch für das Programm

Was brauchen wir?

- Expressive **logische Sprache** (**Assn**)
- Konzeptbildung auf der Modellebene
  - Reichere Typen (bspw. Repräsentation von Feldern durch Listen)
  - Mehr Funktionen (bspw. auf Listen)
- Beispiele:
  - Separate Modellierungssprache, bspw. UML/OCL
  - Modellierungskonzepte in der Annotationssprache (ACSL, JML)

Modellierung von Typen: Integer

- Vereinfachung: **int** wird abgebildet auf $\mathbb{Z}$
- Das **kann** sehr falsch sein
- Manchmal **unerwartete** Effekte
- Behebung: statisch auf **Überlauf** prüfen
  - Nachteil: Plattformspezifisch

Binäre Suche

```
1  int binary_search(int val, int buf[], unsigned len)
2  {
3    // {0 ≤ len}
4    int low, high, mid, res;
5    low = 0; high = len;
6    while (low < high) {
7      mid= (low+ high)/2;
8      if (buf[mid] < val)
9        low = mid + 1;
10     else
11       high = mid;
12   }
13   if (low < len && buf[low] == val)
14     res= low;
15   else
16     res= -1;
17   // { res ≠ -1 ⟶ buf[res] = val ∧                    }
       //      res = -1 ⟶ ∀j.0 ≤ j < len ⟶ buf[j] ≠ val
18 }
```

Binäre Suche, korrekt

```
1  int binary_search(int val, int buf[], unsigned len)
2  {
3    // {0 ≤ len}
4    int low, high, mid, res;
5    low = 0; high = len;
6    while (low < high) {
7      mid= low+ (high−low)/2;
8      if (buf[mid] < val)
9        low = mid + 1;
10     else
11       high = mid;
12   }
13   if (low < len && buf[low] == val)
14     res= low;
15   else
16     res= −1;
17   // { res ≠ −1 ⟶ buf[res] = val ∧                    }
         res = −1 ⟶ ∀j.0 ≤ j < len ⟶ buf[j] ≠ val
18 }
```


Typen: reelle Zahlen

- Vereinfachung: **double** wird abgebildet auf $\mathbb{R}$
- Auch hier **Fehler** und **unerwartete Effekte** möglich:
  - Kein Überlauf, aber **Rundungsfehler**
  - Fließkommazahlen: Standard IEEE 754-2008
- Mögliche Abhilfe:
  - Spezifikation der Abweichung von **exakter** (ideeller) Berechnung

Typen: labelled records

- Passen gut zu Klassen (Klassendiagramme in der UML)
- Bis auf Methoden: impliziter Parameter self
  - Werden nicht behandelt

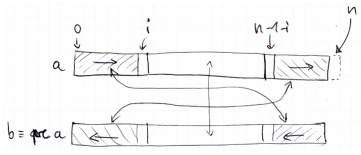
Typen: Felder

- Was repräsentiert **Felder**?
- **Sequenzen** (Listen)
- Modellierungssprache:
  - Annotation + **OCL**

Ein längeres Beispiel: reverse in-place

```
1  i= 0;
2  // {∀i.0 ≤ i < n ⟶ a[i] = b[i]}
3  while (i< n/2) {
4    // ???
5    tmp= a[n−1−i];
6    a[n−1−i]= a[i];
7    a[i]= tmp;
8    i= i+1;
9  }
10 // {∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[i] = b[n − 1 − i]}
```


reverse-in-place: die Invariante



Mathematisch:

$$\{\ \forall j.0 \le j < i \longrightarrow a[j] = b[n-1-j] \wedge$$
$$\forall j.n-1-i < j < n \longrightarrow a[j] = b[n-1-j] \wedge$$
$$\forall j.i \le j \le n-1-i \longrightarrow a[j] = b[j]\ \}$$

Ein längeres Beispiel: reverse in-place

```
1  i= 0;
2  // {∀i.0 ≤ i < n ⟶ a[i] = b[i]}
3  while (i< n/2) {
4    // { ∀j.0 ≤ j < i ⟶ a[j] = b[n − 1 − j]∧
         ∀j.n − 1 − i < j < n ⟶ a[j] = b[n − 1 − j]∧
         ∀j.i ≤ j ≤ n − 1 − i ⟶ a[j] = b[j]  }
5    tmp= a[n−1−i];
6    a[n−1−i]= a[i];
7    a[i]= tmp;
8    i= i+1;
9  }
10 // {∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[i] = b[n − 1 − i]}
```


Arbeitsblatt 10.1: Jetzt seit ihr dran

- Berechnet die Beweisverpflichtungen aus der While-Schleife bei reverse-in-place:

$$I \wedge b \longrightarrow \mathrm{awp}(c, I)$$

- Dazu berechnet ihr awp(c, I), mit
  $c =$

```
tmp= a[n−1−i];
a[n−1−i]= a[i];
a[i]= tmp;
i= i+1;
```

$I = \{\ \forall j.0 \le j < i \longrightarrow a[j] = b[n-1-j] \wedge$
$\forall j.n-1-i < j < n \longrightarrow a[j] = b[n-1-j] \wedge$
$\forall j.i \le j \le n-1-i \longrightarrow a[j] = b[j]\ \}$

- Ihr braucht noch nichts zu beweisen...

Vereinfacht mit Modellbildung

- seq(a, n) ist ein Feld der Länge n repräsentiert als Liste (Sequenz)
- Aktionen auf Sequenzen:
  - :, [] — Listenkonstruktoren
  - rev(a) — Reverse
  - $a[i : j]$ — Slicing (à la Python)
  - ++ — Konkatenation

Interaktion mit der Substitution

- set(a, i, v) ist der **funktionale Update** an Index i mit dem Wert v:

$$\begin{aligned} \text{set}([], i, v) &== [] \\ \text{set}(a : as, 0, v) &== v : as \\ i > 0 \longrightarrow \text{set}(a : as, i, v) &== a : \text{set}(as, i-1, v) \\ i < 0 \longrightarrow \text{set}(as, i, v) &== as \end{aligned}$$

- Damit ist

$$\text{seq}(a, n)[v/a[i]] = \text{set}(\text{seq}(a, n), i, v)$$

Reverse-in-Place mit Listen

```
1  i= 0;
2  // {bs = seq(a,n)}
3  while (i< n/2)
4    /** inv  as = seq(a,n) ⟹
                rev(as[n − i : n])++as[i : n − i]++ rev(as[0 : i]) = bs
5    */ {
6    tmp= a[n−1−i];
7    a[n−i−1]= a[i];
8    a[i]= tmp;
9    i= i+1;
10 }
11 // {as = seq(a,n) ⟹ rev(as) = bs}
```

- Damit vereinfachte VCs und vereinfachter Beweis.

Arbeitsblatt 10.2: Beweise mit Listen

- Beweist durch **strukturelle Induktion** auf Sequenzen:

$$\text{rev}(as{+}{+}bs) == \text{rev}(bs){+}{+}\,\text{rev}(as)$$

- Strukturelle Induktion heißt:
  1. Induktionsbasis: zeige Aussage für $as \stackrel{def}{=} []$.
  2. Induktionsschritt: Annahme der Aussage, zeige Aussage für $as \stackrel{def}{=} a : as$
- Beweis durch Umformung, Anwendung der Gleichungen für rev, ++

$$\begin{aligned} \text{rev}([]) &== [] \\ \text{rev}(x : xs) &== \text{rev}(xs){+}{+}[x] \\ []{+}{+}ys &== ys \\ (x : xs){+}{+}ys &== x : (xs{+}{+}ys) \end{aligned}$$

Fazit

- Die Abstraktion ermöglicht wesentlich **kürzere** Vorbedingungen und Verifikationsbedingungen.
- Die Beweise auf Ebene der Listen sind wesentlich **einfacher**.
- Die Theorie der Listen ist wesentlich **reicher**.

Formelsprache mit Quantoren

- Wir brauchen Programmausdrücken wie **Aexp**
- Wir müssen neue Funktionen verwenden können
  - Etwa eine Fakultätsfunkion
- Wir müssen neue Prädikate definieren können
  - rev, ++, *sorted*, ...
- Wir müssen Formeln bilden können
  - Analog zu **Bexp**
  - Zusätzlich mit Implikation $\longrightarrow$, Äquivalenz $\longleftrightarrow$
  - Zusätzlich Quantoren über logische Variablen wie in

$$(\forall j.\, 0 \le j < n \longrightarrow P[j]) \wedge P[n] \longrightarrow \forall j.\, 0 \le j < n+1 \longrightarrow P[j]$$
$$\forall i.\, i \ge 0 \longrightarrow (\mathit{sorted}(a, i+1) \longleftrightarrow (a[i] \le a[i+1] \wedge \mathit{sorted}(a, i)))$$

Was brauchen wir?

- Definiere Terme als Variablen und Funktionen besimmter Stelligkeit
- Definiere Literale und Formeln
- Interpretation von Formeln
  - mit und ohne Programmvariablen

Zusicherungen (Assertions)

- Erweiterung von **Aexp** and **Bexp** durch
  - **Logische** Variablen **Var** $v := N, M, L, U, V, X, Y, Z$
  - ~~Definierte Funktionen und Prädikate über **Aexp**~~ ~~$n!, \sum_{i=1}^{n} i, \ldots$~~
  - Funktionen und Prädikate selbst definieren
  - Implikation, **Äquivalenzen**, Quantoren $b_1 \longrightarrow b_2, b_1 \longleftrightarrow b_2, \forall v.\, b, \exists v.\, b$
- Formal:

$$\begin{aligned} \textbf{Lexp}\ \ l &::= \textbf{Idt} \mid l[a] \mid l.\textbf{Idt} \\ \textbf{Aexpv}\ \ a &::= \textbf{Z} \mid \textbf{Idt} \mid \textbf{Var} \mid \textbf{C} \mid \textbf{Lexp} \\ &\quad \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 \times a_2 \\ &\quad \mid f(e_1, \ldots, e_n) \\ \textbf{Assn}\ \ b &::= \textbf{1} \mid \textbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 != a_2 \mid a_1 <= a_2 \\ &\quad \mid !\, b \mid b_1 \,\&\&\, b2 \mid b_1 \,||\, b_2 \\ &\quad \mid b_1 \longrightarrow b_2 \mid b_1 \longleftrightarrow b_2 \mid p(e_1, \ldots, e_n) \\ &\quad \mid \forall v.\, b \mid \exists v.\, b \end{aligned}$$

Die bisherigen Funktionen

Die bisherigen Funktionen selbst definiert:

$$n! == factorial(n)$$
$$i \leq 0 \longrightarrow factorial(i) == 1$$
$$i > 0 \longrightarrow factorial(i) == i \cdot factorial(i-1)$$
$$\sum_{i=a}^{b} i == sum(a,b)$$
$$a > b \longrightarrow sum(a,b) == 0$$
$$a <= b \longrightarrow sum(a,b) == a + sum(a+1,b)$$

Kombination aus eingebautem **syntaktische Zucker** und eigenen **Definitionen**.

Die bisherigen Funktionen

- $\sum_{i=a}^{b} e, \prod_{i=a}^{b} e$ benötigen Funktionen **höherer Ordnung** und **anonyme Funktionen**:
- Ganz allgemein:

$$a \leq b \longrightarrow [a\,..\,b] == a : [a+1\,..\,b]$$
$$a > b \longrightarrow [a\,..\,b] == []$$
$$foldl(f, c, a : as) == foldl(f, f(c,a), as)$$
$$foldl(f, c, []) == c$$
$$\sum_{i=a}^{b} e(i) == foldl(\lambda xi.x + e(i), 0, [a\,..\,b])$$
$$\prod_{i=a}^{b} e(i) == foldl(\lambda xi.x \cdot e(i), 0, [a\,..\,b])$$

Ein Zoo von Logiken

- Das grundlegende Dilemma:

Entscheidbarkeit ⟷ Ausdrucksmächtigkeit

- Der Logik-Zoo:

	Entscheidbar	Vollständig	
Aussagenlogik (OPL)	✓	✓	$(A \wedge B) \vee C$
Pressburger Arithmetik	✓	✓	$n < x \longrightarrow n + a < x + a$
Prädikatenlogik (PL)	X	✓	$\forall x.\, \exists y.\, x = y$
Peano-Arithmetik	X	X	$n \cdot 0 = 0$
PL mit Ind. & Fkt.	X	X	*Z3*
Prädikatenlogik 2. Stufe	X	X	$\forall P.\, P(0) \longrightarrow \forall n.\, P(n)$
Logik höherer Stufe (HOL)	X	X	*Haskell*

- Auswahl der Logik: Kompromiss (*sweet spot*)

Erfüllung von Zusicherungen

- Wann gilt eine Zusicherung $b \in$ **Assn** in einem Zustand σ?
  - Auswertung (denotationale Semantik) ergibt *true*
- **Belegung** der logischen Variablen: I : **Var** $\to$ (**Z** $\cup$ **C**)
- Semantik von b unter der Belegung I: $[\![b]\!]^I_{\mathcal{B}v}, [\![a]\!]^I_{\mathcal{A}v}$

$$[\![I]\!]^I_{\mathcal{A}v} = \{(\sigma, \sigma(i)) \mid (\sigma, i) \in [\![I]\!]^I_{\mathcal{L}v}, i \in Dom(\sigma)\}$$

Erfüllung von Zusicherungen

- Wann gilt eine Zusicherung $b \in$ **Assn** in einem Zustand σ?
  - Auswertung (denotationale Semantik) ergibt *true*
- **Belegung** der logischen Variablen: I : **Var** $\to$ (**Z** $\cup$ **C** $\cup$ Array)
- Semantik von b unter der Belegung I:

$$[\![\forall v.b]\!]^I_{\mathcal{B}v} = \{(\sigma, true) \mid \text{für alle } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, true) \in [\![b]\!]^{I[i/v]}_{\mathcal{B}v}\}$$
$$\cup \{(\sigma, false) \mid \text{für ein } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, false) \in [\![b]\!]^{I[i/v]}_{\mathcal{B}v}\}$$
$$[\![\exists v.b]\!]^I_{\mathcal{B}v} = \{(\sigma, true) \mid \text{für ein } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, true) \in [\![b]\!]^{I[i/v]}_{\mathcal{B}v}\}$$
$$\cup \{(\sigma, false) \mid \text{für alle } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, false) \in [\![b]\!]^{I[i/v]}_{\mathcal{B}v}\}$$

Analog für andere Typen.

Erfülltheit von Zusicherungen

Erfülltheit von Zusicherungen

$b \in$ **Assn** ist in Zustand σ mit Belegung I erfüllt ($\sigma \models^I b$), gdw

$$[\![b]\!]^I_{\mathcal{B}v}(\sigma) = true$$

Formeln ohne Programmvariablen, ohne Arrays, ohne Strukturen

- Eine Formel $b \in$ **Assn** ist pur, wenn sie weder Programmvariablen, noch Strukturen, noch Felder enthält (also keine Teilterme aus **Lexp** und **Idt**.
- Eine Formel ist geschlossen, wenn sie pur ist und keine freien logischen Variablen enthält.
- Sei **Assn**$^c \subseteq$ **Assn** die Menge der geschlossenen Formeln

Lemma

Für eine geschlossene Formel b ist der Wahrheitswert $[\![b]\!]^I_{\mathcal{B}v}(\sigma)$ von b unabhängig von I und σ.

- Sei Γ eine endliche Menge von Formeln, dann definieren wir

$$\bigwedge \Gamma := \begin{cases} b_1 \wedge \cdots \wedge b_n & \text{für alle } b_i \in \Gamma, \Gamma \neq \emptyset \\ true & \text{falls } \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

Erfülltheit von Zusicherungen unter Kontext

Erfülltheit von Zusicherungen unter Kontext

Sei $\Gamma \subseteq$ **Assn**^{c} eine endliche Menge und $b \in$ **Assn**. Im Kontext Γ ist b in Zustand σ mit Belegung I erfüllt ($\Gamma, \sigma \models^I b$), gdw

$$[\![\Gamma \longrightarrow b]\!]^I_{\mathcal{B}v}(\sigma) = true$$

Floyd-Hoare-Tripel mit Kontext

- Sei $\Gamma \in \mathbf{Assn}^C$ und $P, Q \subseteq \mathbf{Assn}$

Partielle Korrektheit unter Kontext ($\Gamma \models \{P\}\, c\, \{Q\}$)

c ist **partiell korrekt**, wenn für alle Zustände σ und alle Belegungen I die unter Kontext Γ P erfüllen, gilt:
wenn die Ausführung von c mit σ in σ' terminiert, **dann** erfüllen σ' und I im Kontext Γ auch Q.

$$\Gamma \models \{P\}\, c\, \{Q\} \iff \forall I.\, \forall \sigma.\, \Gamma, \sigma \models^I P \wedge \exists \sigma'.\, (\sigma, \sigma') \in [\![c]\!]_C \implies \Gamma, \sigma' \models^I Q$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \Gamma \vdash \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{while}(b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A\}\, c_1\, \{B\} \qquad \Gamma \vdash \{B\}\, c_2\, \{C\}}{\Gamma \vdash \{A\}\, c_1; c_2\, \{C\}}$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A) \qquad \Gamma \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad \Gamma \longrightarrow (B \longrightarrow B')}{\Gamma \vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$

und es muss gezeigt werden für alle Zustände σ und Belegungen I dass $\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)$ wahr bzw. dass

$$[\![\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)]\!]^I_{\mathcal{B}v}(\sigma) = \mathit{true}$$

- $[\![.]\!]^I_{\mathcal{B}v}(\sigma)$ im Allgemeinen nicht berechenbar wegen

$$[\![\forall \mathbf{z} v.b]\!]^I_{\mathcal{B}v} = \{(\sigma, 1) \mid \text{für alle } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, 1) \in [\![b]\!]^{I[i/v]}_{\mathcal{B}v}\} \cup \{(\sigma, 0) \mid \text{für ein } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, 0) \in [\![b]\!]^{I[i/v]}_{\mathcal{B}v}\}$$

- Unvollständigkeit der Prädiktenlogik

Zusammenfassung

- Spezifikation erfordert **Modellbildung**
- Herangehensweisen:
  - Modellbildung in der Annotation ("ghost-code")
  - Separate Modellierungssprache
- Erweiterung der Annotationssprache um logische Anteile
  - Quantoren, Typen, Kontexte
- Problem: Unvollständigkeit der Logik