Praktische Informatik 3: Einführung in die Funktionale Programmierung
Vorlesung vom 08.12.2010: Abstrakte Datentypen

Christoph Lüth & Dennis Walter

Universität Bremen

Wintersemester 2010/11

Fahrplan

- Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
  - Abstrakte Datentypen
  - Signaturen und Eigenschaften
  - Aktionen und Zustände
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt

- Abstrakte Datentypen
  - Allgemeine Einführung
  - Realisierung in Haskell
  - Beispiele

Einfache Bäume

- Schon bekannt: Bäume

```
data Tree α = Null
            | Node (Tree α) α (Tree α)
```

- Dazu Test auf Enthaltensein:

```
member' :: Eq α⇒ α→ Tree α→ Bool
member' _ Null = False
member' b (Node l a r) =
  a == b || member' b l || member' b r
```

- Problem: Suche aufwändig (Backtracking)
- Besser: Baum geordnet
  - Noch besser: Baum balanciert

Geordnete Bäume

- Voraussetzung:
  - Ordnung auf `a` (`Ord a`)
  - Es soll für alle Bäume gelten:

$$\forall \texttt{x t . t= Node l a r} \longrightarrow (\texttt{member x l} \longrightarrow \texttt{x} < \texttt{a}) \wedge (\texttt{member x r} \longrightarrow \texttt{a} < \texttt{x})$$

  - Beispiel für eine Datentyp-Invariante
- Test auf Enthaltensein vereinfacht:

```
member :: Ord α⇒ α→ Tree α→ Bool
member _ Null = False
member b (Node l a r)
  | b < a  = member b l
  | a == b = True
  | b > a  = member b r
```

Geordnete Bäume

- Ordnungserhaltendes Einfügen

```
insert :: Ord α⇒ α→ Tree α→ Tree α
insert a Null = Node Null a Null
insert b (Node l a r)
  | b < a  = Node (insert b l) a r
  | b == a = Node l a r
  | b > a  = Node l a (insert b r)
```

- Problem: Erzeugung ungeordneter Bäume möglich.
- Lösung: Verstecken der Konstrukturen.
- Warum? E.g. Implementation von geordneten Mengen

Geordnete Bäume als abstrakter Datentyp

- Es gibt einen Typ `Tree a`
- Es gibt Operationen
  - empty :: Ord $\alpha \Rightarrow$ Tree α
    - Nicht `Null :: Tree a`, sonst Konstruktor sichtbar
  - insert :: Ord $\alpha \Rightarrow \alpha \rightarrow$ Tree $\alpha \rightarrow$ Tree α
  - member :: Ord $\alpha \Rightarrow \alpha \rightarrow$ Tree $\alpha \rightarrow$ Bool
  - ... und keine weiteren!
- Beispiel für einen abstrakten Datentypen
- Datentyp-Invarianten können außerhalb des definierenden Moduls nicht verletzt werden

Abstrakte Datentypen

Definition (ADT)

Ein abstrakter Datentyp (ADT) besteht aus einem (oder mehreren) Typen und Operationen auf diesem.

- Werte des Typen können nur über die bereitgestellten Operationen erzeugt werden.
- Eigenschaften von Werten des Typen (insb. ihre innere Struktur) können nur über die bereitgestellten Operationen beobachtet werden.

Zur Implementation von ADTs in einer Programmiersprache:
Möglichkeit der Kapselung durch

- Module
- Objekte

ADTs in Haskell: Module

- Einschränkung der Sichtbarkeit durch Verkapselung
- Modul: Kleinste verkapselbare Einheit
- Ein Modul umfaßt:
  - Definitionen von Typen, Funktionen, Klassen
  - Deklaration der nach außen sichtbaren Definitionen
- Syntax:

  `module` *Name* (*sichtbare Bezeichner*) `where` *Rumpf*

  - *sichtbare Bezeichner* können leer sein
- Gleichzeitig: Modul $\hat{=}$ Übersetzungseinheit (getrennte Übersetzung)

Beispiel: Exportliste für Bäume

- Export als abstrakter Datentyp
  module OrdTree (Tree, insert , member, empty) **where**
  - Typ Tree extern sichtbar
  - Konstruktoren versteckt
- Export als konkreter Datentyp
  module OrdTree (Tree(..), insert , member, empty) **where**
  - Konstruktoren von Tree sind extern sichtbar
  - Pattern Matching ist möglich
  - Erzeugung auch von ungeordneten Bäumen möglich

Benutzung von ADTs

- Operationen und Typen müssen bekannt gemacht werden (Import)
- Möglichkeiten des Imports:
  - Alles importieren
  - Nur bestimmte Operationen und Typen importieren
  - Bestimmte Typen und Operationen nicht importieren

Importe in Haskell

- Schlüsselwort: `import` *Name* `[hiding]` (*Bezeichner*)
- *Bezeichner* geben an, was importiert werden soll:
  - Ohne Bezeichner wird alles importiert
  - Mit `hiding` werden Bezeichner nicht importiert
  - Alle Importe stehen immer am Anfang des Moduls
- Qualifizierter Import zur Vermeidung von Namenskollisionen
  - `import qualified` *Name* `as` *OtherName*
  - Z. B. **import qualified** Data.Map as M

Beispiel: Importe von Bäumen

Import(e)	Bekannte Bezeichner
`import OrdTree`	`Tree, insert, member, empty`
`import OrdTree(Tree, empty)`	`Tree, empty`
`import OrdTree(insert)`	`insert`
`import OrdTree hiding (member)`	`Tree, empty, insert`
`import OrdTree(empty)` `import OrdTree hiding (empty)`	`empty,` `Tree, insert, member`

Baumtraversion als Funktion höherer Ordnung

- Nützlich: Traversion als generisches fold
- Dadurch Iteration über den Baum möglich, ohne Struktur offenzulegen

```
foldT :: (α → β → β → β) → β → Tree α → β
foldT f e Null = e
foldT f e (Node l a r) =
    f a (foldT f e l) (foldT f e r)
```

- Damit externe Definition von Aufzählung möglich:

```
enum :: Ord α ⇒ Tree α → [α]
enum = foldT (λx l1 l2 → l1 ++ x : l2) []
```

Schnittstelle vs. Implementation

- Gleiche Schnittstelle kann unterschiedliche Implementationen haben
- Beispiel: (endliche) Mengen

Endliche Mengen: Typsignaturen (1)

- Abstrakter Datentyp für endliche Mengen (polymorph über Elementtyp)

```
type Set a
```

- Leere Menge:

```
empty :: Set a
```

- Einfügen in eine Menge:

```
insert :: Ord a ⇒ a → Set a → Set a
```

- Test auf Enthaltensein

```
member :: Ord a ⇒ a → Set a → Bool
```

Endliche Mengen: Typsignaturen (2)

- Test auf leere Menge

```
null :: Set a → Bool
```

- Vereinigung

```
union :: Ord a ⇒ Set a → Set a → Set a
```

- Schnittmenge

```
intersection :: Ord a ⇒ Set a → Set a → Set a
```

- Umwandlung zu Listen

```
toList :: Set a → [a]
fromList :: Ord a ⇒ [a] → Set a
```

- Mappen und Falten:

```
map :: (Ord a, Ord b) ⇒ (a → b) → Set a → Set b
fold :: (a → b → b) → b → Set a → b
```

Endliche Mengen: Eigenschaften

- Die leere Menge

```
empty null
not (empty (insert x s))
```

- Extensionalität

  s1 ==s2 $\Leftrightarrow$ ($\forall x$. member x s1 $\Leftrightarrow$ member x s2)

- Einfügen und Enthaltensein

```
insert x (insert y s) == insert y (insert x s)
member x (insert x s)
```

- Schnittmenge

```
member x (intersection s1 s2) ==
  member x s1 && member x s2
```

- Vereinigung

```
member x (union s1 s2) ==
  member x s1 || member x s2
```

Endliche Mengen: Implementierung

- Für den Anwender von Data.Set irrelevant!
- Wichtig aus Implementierungssicht: Effizienz
- Verschiedene Möglichkeiten der Repräsentation
  - Sortierte Listen: **type** Set a = [a]
  - Funktionen: **type** Set a = a → Bool
  - In der Tat verwendet: Balancierte Bäume

    data Set a = Tip | Bin Int a (Set a) (Set a)

    (Int gibt die Größe des Baumes an.)

Endliche Abbildungen

- Eine Sichtweise: Ersatz für Hashtables in imperativen Sprachen.
  Sehr nützlich!
- Abstrakter Datentyp für endliche Abbildungen (polymorph über Schlüssel- und Werttyp)

```
type Map a b
```

- Leere Abbildung:

```
empty :: Map a b
```

- Hinzufügen eines Schlüssel/Wert-Paars

```
insert :: Ord a ⇒ a → b → Map a b → Map a b
```

- Test auf Enthaltensein

```
member :: Ord a ⇒ a → Map a b → Bool
```

Weitere Funktionen

- Test auf leere Abbildung

```
null :: Map a b → Bool
```

- Nachschlagen eines Werts

```
lookup :: Ord a ⇒ a → Map a b → Maybe b
(!) :: Ord a ⇒ Map a b → a → b
```

- Löschen

```
delete :: Ord a ⇒ a → Map a b → Map a b
```

- Einfügen und Duplikatkonflikte lösen

```
insertWith :: Ord a ⇒
  (b → b → b) → a → b → Map a b → Map a b
```

- Mappen und Falten:

```
map :: (b → c) → Map a b → Map a c
fold :: (b → c → c) → c → Map a b → c
```

Endl. Abbildungen: Anwendungsbeispiele

- Anzahl von Artikeln im Warenhaus

```
type Warehouse = Data.Map String Int

nLeft :: Warehouse → String → Int → Bool
nLeft w art n =
  case s `Data.Map.lookup` w of
    Nothing → False
    Just m → m ≥ n

addArticle :: String → Int → Warehouse →
              Warehouse
addArticle art n w =
  Data.Map.insertWith (+) art w
```

Weiterer Datentyp: Prioritätswarteschlangen

- Signatur von Prioritätswarteschlangen ähnlich Stacks und FIFO Queues:

```
type PriorityQueue k a
```

  k steht für Priorität, a ist eigentlicher Wert

- Operationen:
  - empty :: PriorityQueue k a
  - null :: Ord k⇒ PriorityQueue k a → Bool
  - insert :: Ord k⇒ k → a → PriorityQueue k a → PriorityQueue k a
  - minKeyValue :: Ord k⇒ PriorityQueue k a → (k, a)
  - deleteMin :: Ord k⇒ PriorityQueue k a → PriorityQueue k a

Implementierung mittels Heaps

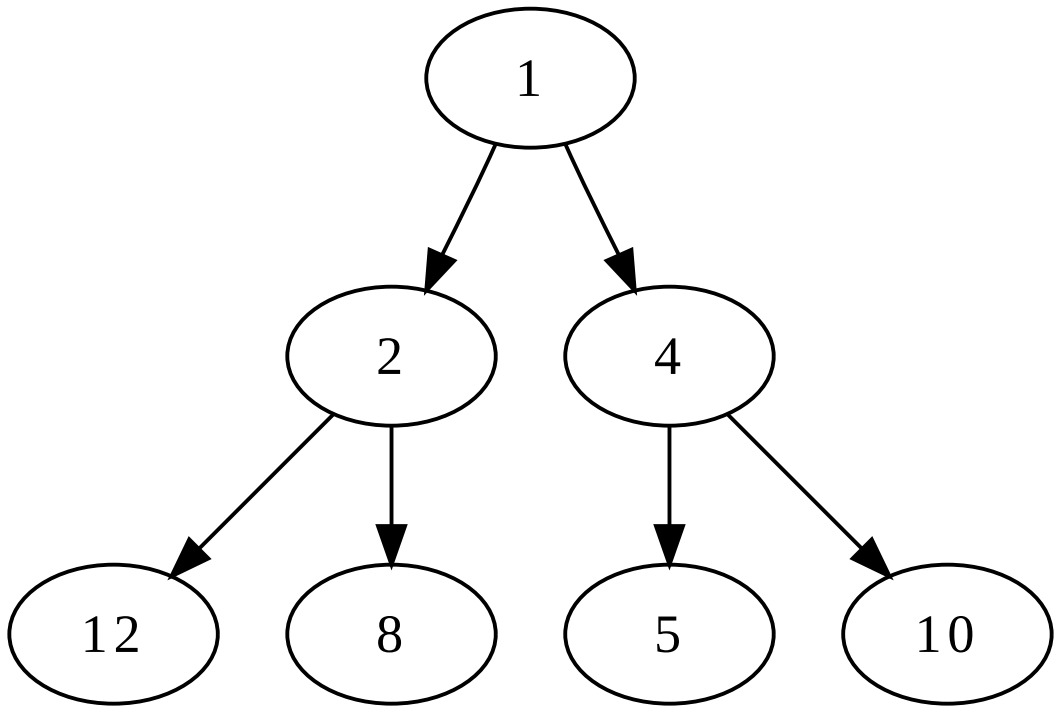
- Ein Heap ist eine baumartige Datenstruktur mit der Heap-Eigenschaft:
  - **data** Heap k a =Nil | Branch k a (Heap k a) (Heap k a)

```
heapProp :: Ord k⇒ Heap k a → Bool
heapProp Nil = True
heapProp (Branch k a l r) =
  k ≤ min (minH k l) (minH k r)
  && heapProp l && heapProp r
  where minH k Nil = k
        minH _ (Branch k a l r) =
          min k (min (minH k l) (minH k r))
```

- Wurzelelement jedes Teilbaums ist minimales Element des Teilbaums

Beispiel: Heap-Eigenschaft

- Ein vollständiger binärer Baum mit Heap-Eigenschaft
- Kein geordneter Baum



Binäre Heaps

- Vollständigkeit zusätzlich zur Heap-Eigenschaft

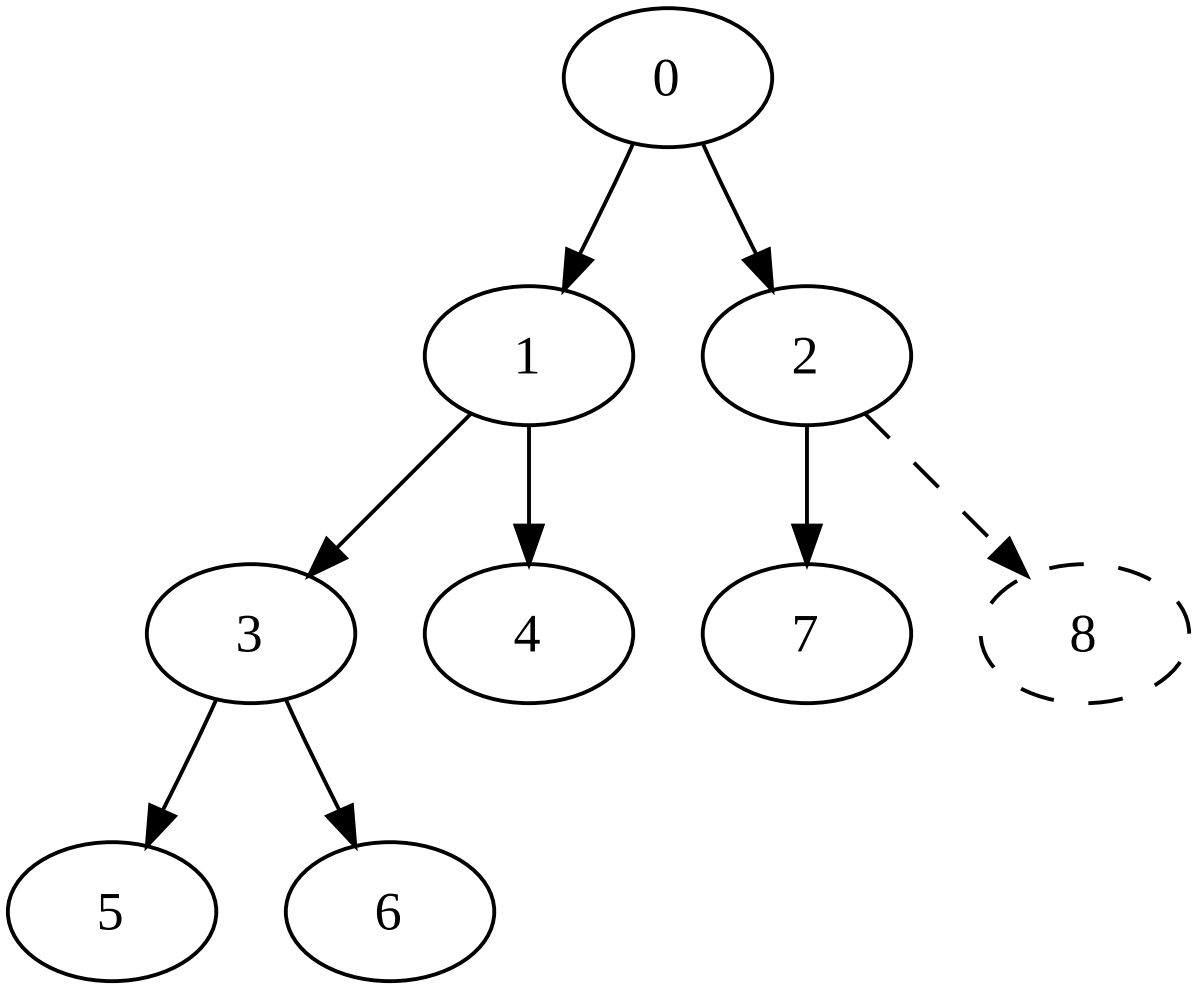
```
depth :: Ord k⇒ Heap k a → Int
depth Nil = 0
depth (Branch _ _ l r) =
  1 + max (depth l) (depth r)

completeAt n Nil = False
completeAt n (Branch _ _ l r) =
  if n > 0 then completeAt (n − 1) l &&
                completeAt (n − 1) r
  else not (null l) && not (null r)

complete t = d < 3 || completeAt (d − 3) t
  where d = depth t
```

Beispiel: Vollständigkeit

- Mit Knoten 8: vollständig
- Ohne 8: höhenbalanciert, aber nicht vollständig



Operationen

- Exportierte Operationen:

```
singleton :: Ord k ⇒ k → a → Heap k a
singleton k a = Branch k a Nil Nil

empty :: Heap k a
empty = Nil

insert :: Ord k ⇒ k → a → Heap k a → Heap k a
insert k a Nil = singleton k a
insert k a (Branch k' a' l r)
    | k < k' = Branch k a (insert k' a' r) l
    | otherwise = Branch k' a' (insert k a r) l

minKeyValue :: Ord k ⇒ Heap k a → (k, a)
minKeyValue (Branch k a _ _) = (k, a)
```

Entfernen des minimalen Elements

- Zum Entfernen: “Hochziehen” des jeweils kleineren Kindelements

```
deleteMin :: Ord k ⇒ Heap k a → Heap k a
deleteMin t =
  case t of
    Branch _ _ Nil r → r
    Branch _ _ l Nil → l
    Branch k a (l@(Branch lk la _ _))
               (r@(Branch rk ra _ _)) →
      if lk < rk then Branch lk la (deleteMin l) r
      else Branch rk ra l (deleteMin r)
```

- Beispiele siehe `../uebung/ueb06/trees.pdf`

Effizienz

- Laufzeitverhalten: $\mathcal{O}(\log(n))$ für insert und deleteMin, $\mathcal{O}(1)$ für minKeyValue, singleton und empty.
- Pairing Heaps als Alternative zu Binären Heaps
  - Worst-case Laufzeit für deleteMin in $\mathcal{O}(n)$
  - Aber: amortisierte Kosten in $\mathcal{O}(\log(n))$ und in der Praxis erstaunlich schnell
- Bsp.: 10^6 zufällig priorisierte Elemente einfügen und entfernen
  - Haskell: Laufzeit $\approx 7s$ (im Vergleich: $\approx 12.7s$ für Binärheap)
  - OCaml: $\approx 3.3s$
  - Java (Binärer Heap als Array): $\approx 3.6s$
- Tests auf 2GHz Intel Dual Core

Zusammenfassung

- Abstrakte Datentypen (ADTs):
  - Besteht aus Typen und Operationen darauf
- Realisierung in Haskell durch Module
- Beispieldatentypen: endliche Mengen und Abbildungen, Prioritätswarteschlangen
- Nächste Vorlesung: ADTs durch Eigenschaften spezifizieren

Vorlesung nächste Woche (15.12.2010) entfällt wegen Tag der Lehre!

Der Übungsbetrieb findet normal statt.