Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 8 vom 06.12.2016: Signaturen und Eigenschaften

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2016/17

Fahrplan

- Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
  - Abstrakte Datentypen
  - Signaturen und Eigenschaften
  - Spezifikation und Beweis
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Abstrakte Datentypen und Signaturen

- Letzte Vorlesung: Abstrakte Datentypen
  - Typ plus Operationen
- Heute: Signaturen und Eigenschaften

Definition (Signatur)
Die Signatur eines abstrakten Datentyps besteht aus den Typen, und der Signatur der darüber definierten Funktionen.

- Keine direkte Repräsentation in Haskell
- Signatur: Typ eines Moduls

Endliche Abbildung: Signatur

- Adressen und Werte sind Parameter
- Typ Map α β, Operationen:

```
data Map α β

empty  :: Map α β

lookup :: Ord α ⇒ α → Map α β → Maybe β

insert :: Ord α ⇒ α → β → Map α β → Map α β

delete :: Ord α ⇒ α → Map α β → Map α β
```


Signatur und Eigenschaften

- Signatur genug, um ADT typkorrekt zu benutzen
  - Insbesondere Anwendbarkeit und Reihenfolge
- Signatur beschreibt nicht die Bedeutung (Semantik):
  - Was wird gelesen?
  - Wie verhält sich die Abbildung?
- Signatur ist Sprache (Syntax) um Eigenschaften zu beschreiben

Eigenschaften Endlicher Abbildungen

1. Aus der leeren Abbildung kann nichts gelesen werden.
2. Wenn etwas geschrieben wird, und an der gleichen Stelle wieder gelesen, erhalte ich den geschriebenen Wert.
3. Wenn etwas geschrieben wird, und an anderer Stelle etwas gelesen wird, kann das Schreiben vernachlässigt werden.
4. An der gleichen Stelle zweimal geschrieben überschreibt der zweite den ersten Wert.
5. An unterschiedlichen Stellen geschrieben kommutiert.

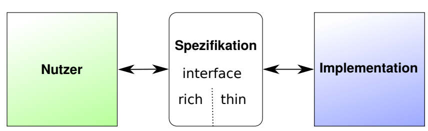
Formalisierung von Eigenschaften

Definition (Axiome)
Axiome sind Prädikate über den Operationen der Signatur

- Elementare Prädikate P:
  - Gleichheit s $==$ t
  - Ordnung s $<$ t
  - Selbstdefinierte Prädikate
- Zusammengesetzte Prädikate
  - Negation not p
  - Konjunktion p && q
  - Disjunktion p || q
  - Implikation p $\Longrightarrow$ q

Axiome als Interface

- Axiome müssen gelten
  - für alle Werte der freien Variablen zu `True` auswerten
- Axiome spezifizieren:
  - nach außen das Verhalten
  - nach innen die Implementation
- Signatur + Axiome = Spezifikation



Axiome für Map

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (insert a v (s :: Map Int String)) == Just v
```

```
lookup a (delete a (s :: Map Int String)) == Nothing
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (delete b s) == lookup a (s :: Map Int String)
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

```
insert a w (insert a v s) == insert a w (s :: Map Int String)
```

- Schreiben über verschiedene Stellen kommutiert:

```
a ≠ b ⟹ insert a v (delete b s) ==
          delete b (insert a v s :: Map Int String)
```

- Sehr viele Axiome (insgesamt 12)!

Thin vs. Rich Interfaces

- Benutzersicht: reiches Interface
  - Viele Operationen und Eigenschaften
- Implementationssicht: schlankes Interface
  - Wenig Operation und Eigenschaften
- Beispiel Map:
  - Rich interface:

```
insert :: Ord α⇒ α→ β→ Map α β→ Map α β
```

```
delete :: Ord α⇒ α→ Map α β→ Map α β
```

  - Thin interface:

```
put :: Ord α⇒ α→ Maybe β→ Map α β→ Map α β
```

  - Thin-to-rich:

```
insert a v = put a (Just v)
```

```
delete a = put a Nothing
```


Axiome für Map (thin interface)

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (put a v (s :: Map Int String)) == v
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (put b v s) ==
          lookup a (s :: Map Int String)
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

```
put a w (put a v s) == put a w (s :: Map Int String)
```

- Schreiben über verschiedene Stellen kommutiert:

```
a ≠ b ⟹ put a v (put b w s) ==
          put b w (put a v s :: Map Int St
```

Thin: 5 Axiome
Rich: 12 Axiome

Axiome als Eigenschaften

- Axiome können getestet oder bewiesen werden
- Tests finden Fehler, Beweis zeigt Korrektheit

> E.W. Dijkstra, 1972
>
> Program testing can be used to show the presence of bugs, but never to show their absence.

- Arten von Tests:
  - Unit tests (JUnit, HUnit)
  - Black Box vs.White Box
  - Coverage-based (z.B. path coverage, MC/DC)
  - Zufallsbasiertes Testen
- Funktionale Programme eignen sich sehr gut zum Testen

Zufallsbasiertes Testen in Haskell

- Werkzeug: *QuickCheck*
- Zufällige Werte einsetzen, Auswertung auf True prüfen
- Polymorphe Variablen nicht testbar
  - Deshalb Typvariablen instantiieren
  - Typ muss genug Element haben (hier Map Int String)
  - Durch Signatur Typinstanz erzwingen
- Freie Variablen der Eigenschaft werden Parameter der Testfunktion

Axiome mit *QuickCheck* testen

- Für das Lesen:

```
prop1 :: TestTree
prop1 = QC.testProperty "read_empty" $ λa→
  lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

```
prop2 :: TestTree
prop2 = QC.testProperty "lookup_put␣eq" $ λa v s→
  lookup a (put a v (s :: Map Int String)) == v
```

- Hier: Eigenschaften als Haskell-Prädikate
- *QuickCheck*-Axiome mit QC.testProperty in *Tasty* eingebettet
- Es werden N Zufallswerte generiert und getestet (Default $N = 100$)

Axiome mit *QuickCheck* testen

- Bedingte Eigenschaften:
  - A ⟹ B mit A, B Eigenschaften
  - Typ ist Property
  - Es werden solange Zufallswerte generiert, bis N die Vorbedingung erfüllende gefunden und getestet wurden, andere werden ignoriert.

```
prop3 :: TestTree
prop3 = QC.testProperty "lookup_put␣other" $ λa b v s→
  a ≠ b ⟹ lookup a (put b v s) ==
            lookup a (s :: Map Int String)
```


Axiome mit *QuickCheck* testen

- Schreiben:

```
prop4 :: TestTree
prop4 = QC.testProperty "put_put␣eq" $ λa v w s→
  put a w (put a v s) == put a w (s :: Map Int String)
```

- Schreiben an anderer Stelle:

```
prop5 :: TestTree
prop5 = QC.testProperty "put_put␣other" $ λa v b w s→
  a ≠ b ⟹ put a v (put b w s) ==
            put b w (put a v s :: Map Int String)
```

- Test benötigt Gleichheit und Zufallswerte für Map a b

Zufallswerte selbst erzeugen

- Problem: Zufällige Werte von selbstdefinierten Datentypen
  - Gleichverteiltheit nicht immer erwünscht (z.B. $[\alpha]$)
  - Konstruktion nicht immer offensichtlich (z.B. Map)
- In *QuickCheck*:
  - Typklasse **class** Arbitrary α für Zufallswerte
  - Eigene Instanziierung kann Verteilung und Konstruktion berücksichtigen

```
instance (Ord a, QC.Arbitrary a, QC.Arbitrary b)⇒
         QC.Arbitrary (Map a b) where
```

  - Bspw. Konstruktion einer Map:
    - Zufällige Länge, dann aus sovielen zufälligen Werten Map konstruieren
    - Zufallswerte in Haskell?

Beobachtbare und Abstrakte Typen

- Beobachtbare Typen: interne Struktur bekannt
  - Vordefinierte Typen (Zahlen, Zeichen), algebraische Datentypen (Listen)
  - Viele Eigenschaften und Prädikate bekannt
- Abstrakte Typen: interne Struktur unbekannt
  - Wenige Eigenschaften bekannt, Gleichheit nur wenn definiert
- Beispiel Map:
  - beobachtbar: Adressen und Werte
  - abstrakt: Speicher

Beobachtbare Gleichheit

- Auf abstrakten Typen: nur beobachtbare Gleichheit
  - Zwei Elemente sind gleich, wenn alle Operationen die gleichen Werte liefern
- Bei Implementation: Instanz für Eq (Ord etc.) entsprechend definieren
  - Die Gleichheit == muss die beobachtbare Gleichheit sein.
- Abgeleitete Gleichheit (**deriving** Eq) wird immer exportiert!

Signatur und Semantik

Stacks
Typ: St α
Initialwert:

```
empty :: St α
```

Wert ein/auslesen:

```
push :: α→ St α→ St α
top  :: St α→ α
pop  :: St α→ St α
```

Last in first out (LIFO).

Queues
Typ: Qu α
Initialwert:

```
empty :: Qu α
```

Wert ein/auslesen:

```
enq   :: α→ Qu α→ Qu α
first :: Qu α→ α
deq   :: Qu α→ Qu α
```

First in first out (FIFO)

Gleiche Signatur, unterscheidliche Semantik.

Eigenschaften von Stack

- Last in first out (LIFO):

```
top (push a s) == a
```

```
pop (push a s) == s
```

```
push a s ≠ empty
```


Eigenschaften von Queue

- First in first out (FIFO):

```
first (enq a empty) == a
```

```
q ≠ empty ⟹ first (enq a q) == first q
```

```
deq (enq a empty) == empty
```

```
q ≠ empty ⟹ deq (enq a q) = enq a (deq q)
```

```
enq a q ≠ empty
```


Implementation von Stack: Liste

Sehr einfach: ein Stack ist eine Liste

```
data St α = St [α]  deriving (Show, Eq)
```

```
empty = St []
```

```
push a (St s) = St (a:s)
```

```
top (St []) = error "St: top on empty stack"
top (St s)  = head s
```

```
pop (St []) = error "St: pop on empty stack"
pop (St s)  = St (tail s)
```


Implementation von Queue

- Mit einer Liste?
  - Problem: am Ende anfügen oder abnehmen ist teuer.
- Deshalb zwei Listen:
  - Erste Liste: zu entnehmende Elemente
  - Zweite Liste: hinzugefügte Elemente rückwärts
  - Invariante: erste Liste leer gdw. Queue leer

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Queue	Repräsentation
empty			([], [])
enq 9		9	([9], [])
enq 4		4 →9	([9], [4])
enq 7		7 →4 →9	([9], [7, 4])
deq	9	7 →4	([4, 7], [])
enq 5		5 →7 →4	([4, 7], [5])
enq 3		3 →5 →7 →4	([4, 7], [3, 5])
deq	4	3 →5 →7	([7], [3, 5])
deq	7	3 →5	([5, 3], [])
deq	5	3	([3], [])
deq	3		([], [])
deq	error		([], [])

Implementation

- Datentyp:

```
data Qu α = Qu [α] [α]
```

- Leere Schlange: alles leer

```
empty = Qu [] []
```

- Erstes Element steht vorne in erster Liste

```
first :: Qu α→ α
first (Qu [] _)     = error "Queue:␣first␣of␣empty␣Q"
first (Qu (x:xs) _) = x
```

- Gleichheit:

```
valid :: Qu α→ Bool
valid (Qu [] ys)  = null ys
valid (Qu (_:_) _) = True
```


Implementation

- Bei enq und deq Invariante prüfen

```
enq x (Qu xs ys) = check xs (x:ys)
```

```
deq (Qu [] _ )     = error "Queue:␣deq␣of␣empty␣Q"
deq (Qu (_:xs) ys) = check xs ys
```

  - Prüfung der Invariante nach dem Einfügen und Entnehmen

- check garantiert Invariante

```
check :: [α]→ [α]→ Qu α
check [] ys = Qu (reverse ys) []
check xs ys = Qu xs ys
```


Zusammenfassung

- Signatur: Typ und Operationen eines ADT
- Axiome: über Typen formulierte Eigenschaften
- Spezifikation = Signatur + Axiome
  - Interface zwischen Implementierung und Nutzung
  - Testen zur Erhöhung der Konfidenz und zum Fehlerfinden
  - Beweisen der Korrektheit
- QuickCheck:
  - Freie Variablen der Eigenschaften werden Parameter der Testfunktion
  - $\Longrightarrow$ für bedingte Eigenschaften