Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

Vorlesung 6 vom 22.11.2016: Funktionen Höherer Ordnung II und Effizienzaspekte

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2016/17

Fahrplan

- Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
  - Einführung
  - Funktionen und Datentypen
  - Algebraische Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Funktionen höherer Ordnung II und Effizenzaspekte
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Heute

- Mehr über map und fold
- map und fold sind nicht nur für Listen
- Effizient funktional programmieren

map als strukturerhaltende Abbildung

- Der Datentyp $()$ ist terminal: es gibt für jeden Datentyp α genau eine total Abbildung $\alpha \to ()$
- Struktur (Shape) eines Datentyps $\mathsf{T}\ \alpha$ ist $\mathsf{T}\ ()$
  - Gegeben durch kanonische Funktion $\mathsf{shape} :: \mathsf{T}\ \alpha \to \mathsf{T}\ ()$, die α durch $()$ ersetzt
  - Für Listen: $[()] \cong \mathsf{Nat}$

map ist die kanonische strukturerhaltende Abbildung

- Für map gelten folgende Aussagen:

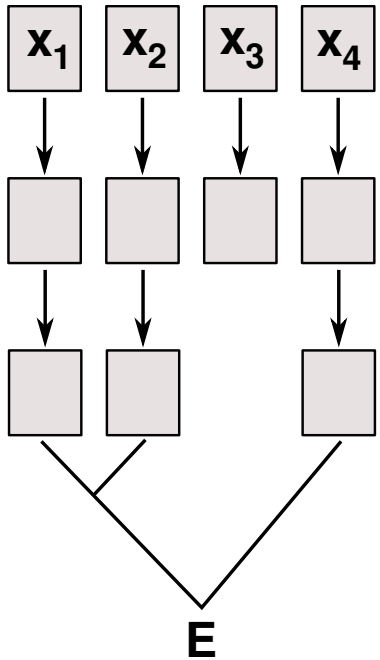
$$\mathsf{map}\ \mathsf{id} = \mathsf{id}$$

$$\mathsf{map}\ \mathsf{f} \circ \mathsf{map}\ \mathsf{g} = \mathsf{map}\ (\mathsf{f} \circ \mathsf{g})$$

$$\mathsf{shape} \circ \mathsf{map}\ \mathsf{f} = \mathsf{shape}$$

map und filter als Berechnungsmuster

- map, filter, fold als Berechnungsmuster:
  1. Anwenden einer Funktion auf jedes Element der Liste
  2. möglicherweise Filtern bestimmter Elemente
  3. Kombination der Ergebnisse zu Endergebnis E



- Gut parallelisierbar, skaliert daher als Berechnungsmuster für große Datenmengen (*big data*)

- Besondere Notation: Listenkomprehension
  `[ f x | x← as, g x ] ≡ map f (filter g as)`
  - Beispiel:

```
digits str = [ord x -ord '0' | x← str, isDigit x]
```

  - Auch mit mehreren Generatoren:

```
idx = [ a: show i | a← ['a'.. 'z'], i← [0.. 9]]
```

foldr ist kanonisch

`foldr` ist die kanonische strukturell rekursive Funktion.

- Alle strukturell rekursiven Funktionen sind als Instanz von `foldr` darstellbar
- Insbesondere auch map und `filter` (siehe Übungsblatt)
- Es gilt: `foldr (:) [] = id`
- Jeder algebraischer Datentyp hat ein `foldr`

fold für andere Datentypen

fold ist universell

Jeder algebraische Datentyp T hat genau ein foldr.

- Kanonische Signatur für T:
  - Pro Konstruktor C ein Funktionsargument f_C
  - Freie Typvariable β für T
- Kanonische Definition:
  - Pro Konstruktor C eine Gleichung
  - Gleichung wendet Funktionsparameter f_C auf Argumente an
- Anmerkung: Typklasse Foldable schränkt Signatur von foldr ein

```
data IL = Cons Int IL | Err String | Mt

foldIL :: (Int→ β→ β)→ (String→ β)→ β→ IL→ β
foldIL f e a (Cons i il) = f i (foldIL f e a il)
foldIL f e a (Err str)   = e str
foldIL f e a Mt          = a
```

fold für bekannte Datentypen

- Bool:

fold für bekannte Datentypen

- Bool: Fallunterscheidung:

```
data Bool = False | True

foldBool :: β→ β→ Bool→ β
foldBool a1 a2 False = a1
foldBool a1 a2 True  = a2
```

- Maybe α:

fold für bekannte Datentypen

- Bool: Fallunterscheidung:

```
data Bool = False | True

foldBool :: β→ β→ Bool→ β
foldBool a1 a2 False = a1
foldBool a1 a2 True  = a2
```

- Maybe α: Auswertung

```
data Maybe α = Nothing | Just α

foldMaybe :: β→ (α→ β)→ Maybe α→ β
foldMaybe b f Nothing  = b
foldMaybe b f (Just a) = f a
```

  - Als maybe vordefiniert

fold für bekannte Datentypen

- Tupel:

fold für bekannte Datentypen

- Tupel: die uncurry-Funktion

```
foldPair :: (α→ β→ γ)→ (α, β)→ γ
foldPair f (a, b)= f a b
```

- Natürliche Zahlen:

fold für bekannte Datentypen

- Tupel: die uncurry-Funktion

```
foldPair :: (α→ β→ γ)→ (α, β)→ γ
foldPair f (a, b)= f a b
```

- Natürliche Zahlen: Iterator

```
data Nat = Zero | Succ Nat
foldNat :: β→ (β→ β)→ Nat→ β
foldNat e f Zero  = e
foldNat e f (Succ n) = f (foldNat e f n)
```

fold für binäre Bäume

- Binäre Bäume:

```
data Tree α = Mt | Node α (Tree α) (Tree α)
```

  - Label nur in den Knoten

- Instanz von fold:

```
foldT :: (α→ β→ β→ β)→ β→ Tree α→ β
foldT f e Mt = e
foldT f e (Node a l r) = f a (foldT f e l) (foldT f e r)
```

  - Instanz von map, kein (offensichtliches) Filter

Funktionen mit foldT und mapT

- Höhe des Baumes berechnen:

```
height :: Tree α→ Int
height = foldT (λ_ l r→ 1+max l r) 0
```

- Inorder-Traversion der Knoten:

```
inorder :: Tree α→ [α]
inorder = foldT (λa l r→ l++ [a]++ r) []
```

Kanonische Eigenschaften von foldT und mapT

- Auch hier gilt:

$$\mathsf{foldT\ Node\ Mt} = \mathsf{id}$$

$$\mathsf{mapT\ id} = \mathsf{id}$$

$$\mathsf{mapT\ f} \circ \mathsf{mapT\ g} = \mathsf{mapT\ (f} \circ \mathsf{g)}$$

$$\mathsf{shape\ (mapT\ f\ xs)} = \mathsf{shape\ xs}$$

- Mit $\mathsf{shape\ ::\ Tree}\ \alpha \rightarrow\ \mathsf{Tree\ ()}$

Das Labyrinth

- Das Labyrinth als variadischer Baum:

```
data VTree α = Node α [VTree α]
```

```
type Lab α = VTree α
```

- Auch hierfür foldT und mapT:

Das Labyrinth

- Das Labyrinth als variadischer Baum:

```
data VTree α = Node α [VTree α]
```

```
type Lab α = VTree α
```

- Auch hierfür foldT und mapT:

```
foldT :: (α→ [β]→ β)→ VTree α→ β
foldT f (Node a ns) = f a (map (foldT f) ns)
```

```
mapT :: (α→ β)→ VTree α→ VTree β
mapT f (Node a ns) = Node (f a) (map (mapT f) ns)
```

Suche im Labyrinth

- Tiefensuche via foldT

```
dfts' :: Lab α→ [Path α]
dfts' = foldT add where
  add a [] = [[a]]
  add a ps = concatMap (map (a :)) ps
```

Suche im Labyrinth

- Tiefensuche via foldT

```
dfts' :: Lab α→ [Path α]
dfts' = foldT add where
  add a [] = [[a]]
  add a ps = concatMap (map (a :)) ps
```

- Problem:
  - foldT terminiert nicht für zyklische Strukturen
  - Auch nicht, wenn add prüft ob a schon enthalten ist
  - Pfade werden vom Ende konstruiert

Effizienzaspekte

Effizienzaspekte

- Zur Verbesserung der Effizienz:
  - Analyse der Auswertungsstrategie
  - ... und des Speichermanagement
- Der ewige Konflikt: Geschwindigkeit vs. Platz

Effizienzaspekte

- Zur Verbesserung der Effizienz:
  - Analyse der Auswertungsstrategie
  - ... und des Speichermanagement
- Der ewige Konflikt: Geschwindigkeit vs. Platz
- Effizenzverbesserungen durch
  - Endrekursion: Iteration in funktionalen Sprachen
  - Striktheit: Speicherlecks vermeiden (bei verzögerter Auswertung)
- Vorteil: Effizienz muss nicht im Vordergrund stehen

Endrekursion

Definition (Endrekursion)

Eine Funktion ist endrekursiv, wenn

(i) es genau einen rekursiven Aufruf gibt,

(ii) der nicht innerhalb eines geschachtelten Ausdrucks steht.

- D.h. darüber nur Fallunterscheidungen: **case** oder **if**
- Entspricht **goto** oder **while** in imperativen Sprachen.
- Wird in Sprung oder Schleife übersetzt.
- Braucht keinen Platz auf dem Stack.

Einfaches Beispiel

- In Haskell:

```
even x = if x> 1 then even (x-2) else x == 0
```

- Übersetzt nach C:

```
int even (int x)
{ if (x>1) return (even (x-2))
  else return x == 0; }
```

Einfaches Beispiel

- In Haskell:

```
even x = if x> 1 then even (x-2) else x == 0
```

- Übersetzt nach C:

```
int even (int x)
{ if (x>1) return (even (x-2))
  else return x == 0; }
```

- Äquivalente Formulierung:

```
int x; int even ()
{ if (x>1) { x -= 2; return even(); }
  return x == 0;  }
```

Einfaches Beispiel

- In Haskell:

```
even x = if x> 1 then even (x–2) else x == 0
```

- Übersetzt nach C:

```
int even (int x)
{ if (x>1) return (even (x–2))
  else return x == 0; }
```

- Äquivalente Formulierung:

```
int x; int even ()
{ if (x>1) { x -= 2; return even(); }
  return x == 0;  }
```

- Iterative Variante mit Schleife:

```
intx; int even ()
{ while (x>1) { x -= 2; }
  return x == 0;  }
```

Beispiel: Fakultät

- Fakultät nicht endrekursiv:

```
fac1 :: Integer→ Integer
fac1 n = if n == 0 then 1 else n * fac1 (n−1)
```

Beispiel: Fakultät

- Fakultät nicht endrekursiv:

```
fac1 :: Integer→ Integer
fac1 n = if n == 0 then 1 else n * fac1 (n−1)
```

- Fakultät endrekursiv:

```
fac2 :: Integer→ Integer
fac2 n     = fac' n 1 where
  fac' :: Integer→ Integer→ Integer
  fac' n acc = if n == 0 then acc
               else fac' (n−1) (n∗acc)
```

- fac1 verbraucht Stack, fac2 nicht.
- Ist nicht merklich schneller?!

Beispiel: Listen umdrehen

- Liste umdrehen, nicht endrekursiv:

```
rev' :: [a]→ [a]
rev' []     = []
rev' (x:xs) = rev' xs ++ [x]
```

  - Hängt auch noch hinten an — $O(n^2)$!

Beispiel: Listen umdrehen

- Liste umdrehen, nicht endrekursiv:

```
rev' :: [a]→ [a]
rev' []     = []
rev' (x:xs) = rev' xs ++ [x]
```

  - Hängt auch noch hinten an — $O(n^2)$!

- Liste umdrehen, endrekursiv und $O(n)$:

```
rev :: [a]→ [a]
rev xs = rev0 xs [] where
    rev0 []     ys = ys
    rev0 (x:xs) ys = rev0 xs (x:ys)
```

- Beispiel: last (rev [1..10000])
- Schneller — warum?

Verzögerte Auswertung und Speicherlecks

- Garbage collection gibt unbenutzten Speicher wieder frei.
  - Unbenutzt: Bezeichner nicht mehr im erreichbar
- Verzögerte Auswertung effizient, weil nur bei Bedarf ausgewertet wird
  - Aber Achtung: Speicherlecks!

Verzögerte Auswertung und Speicherlecks

- Garbage collection gibt unbenutzten Speicher wieder frei.
  - Unbenutzt: Bezeichner nicht mehr im erreichbar
- Verzögerte Auswertung effizient, weil nur bei Bedarf ausgewertet wird
  - Aber Achtung: Speicherlecks!
- Eine Funktion hat ein Speicherleck, wenn Speicher unnötig lange im Zugriff bleibt.
  - "Echte" Speicherlecks wie in C/C++ nicht möglich.
- Beispiel: fac2
  - Zwischenergebnisse werden nicht auswertet.
  - Insbesondere ärgerlich bei nicht-terminierenden Funktionen.

Striktheit

- Strikte Argumente erlauben Auswertung vor Aufruf
  - Dadurch konstanter Platz bei Endrekursion.
- Erzwungene Striktheit: seq :: $\alpha \to \beta \to \beta$

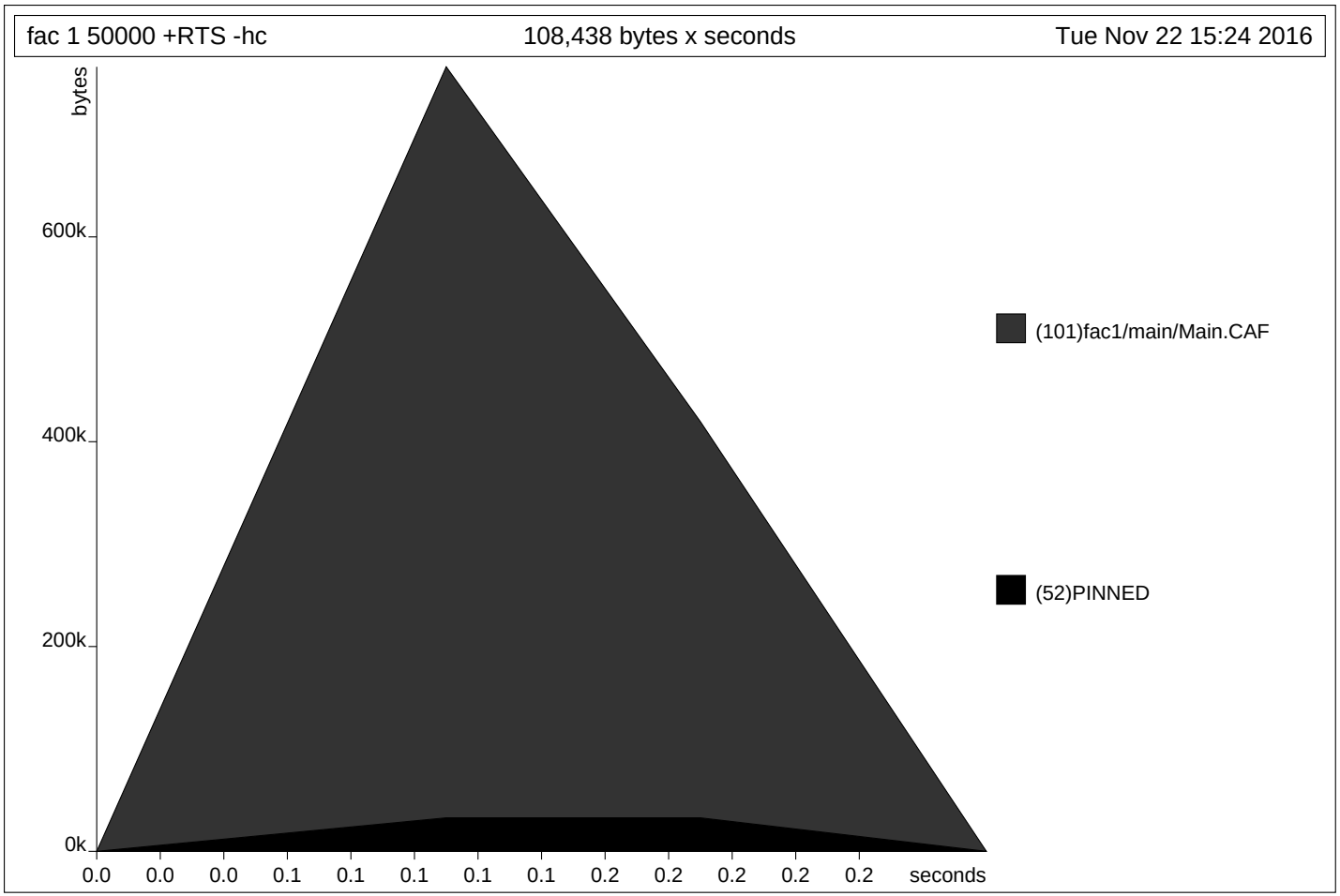
  $\bot$ `'seq'` b = $\bot$

  a `'seq'` b = b
  - seq vordefiniert (nicht in Haskell definierbar)
  - ($!) :: (a→ b)→ a→ b strikte Funktionsanwendung

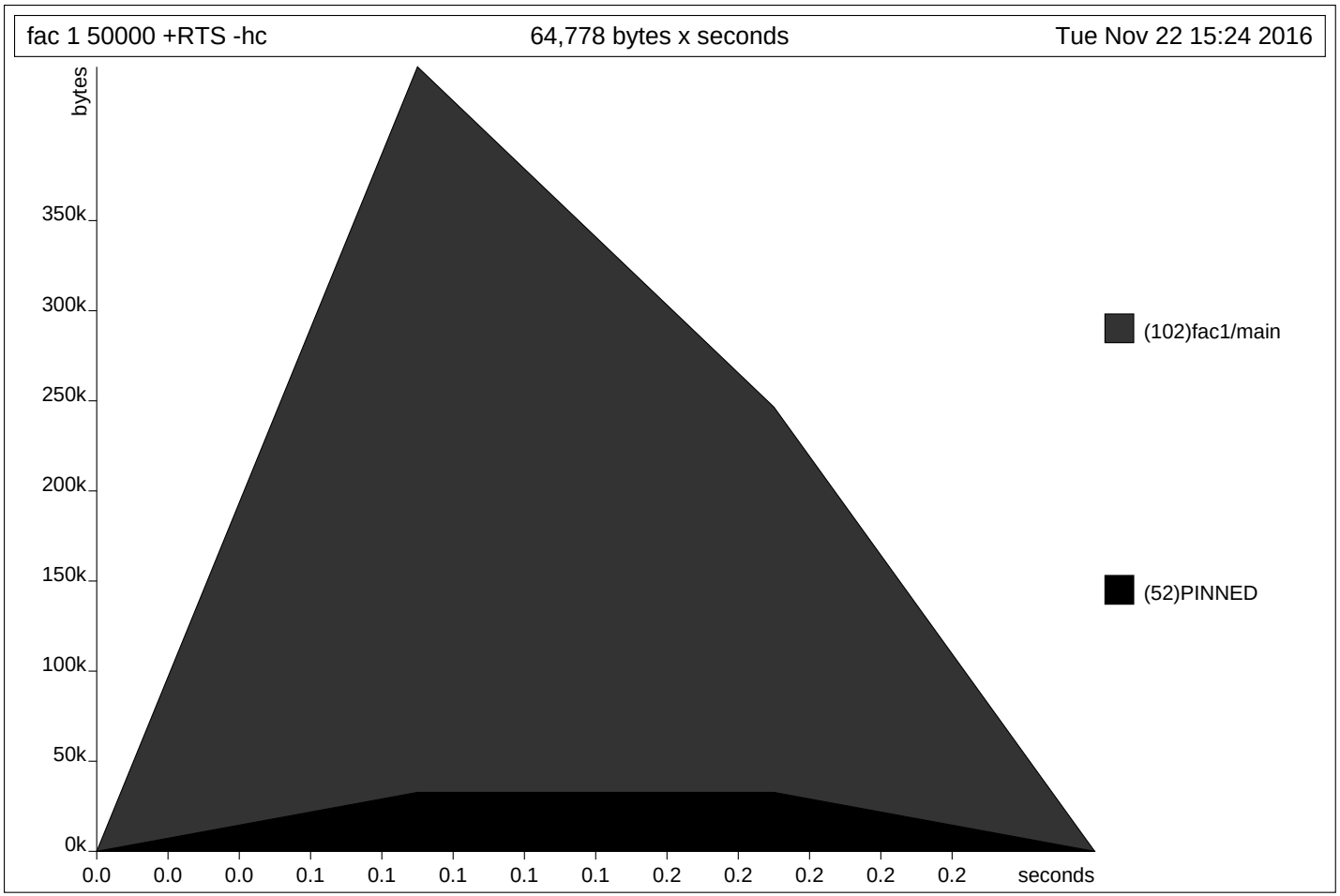
    ```
    f $! x = x `seq` f x
    ```
  - ghc macht Striktheitsanalyse
- Fakultät in konstantem Platzaufwand

```
fac3 :: Integer→ Integer
fac3 n = fac' n 1 where
  fac' n acc = seq acc $ if n == 0 then acc
                         else fac' (n−1) (n∗acc)
```

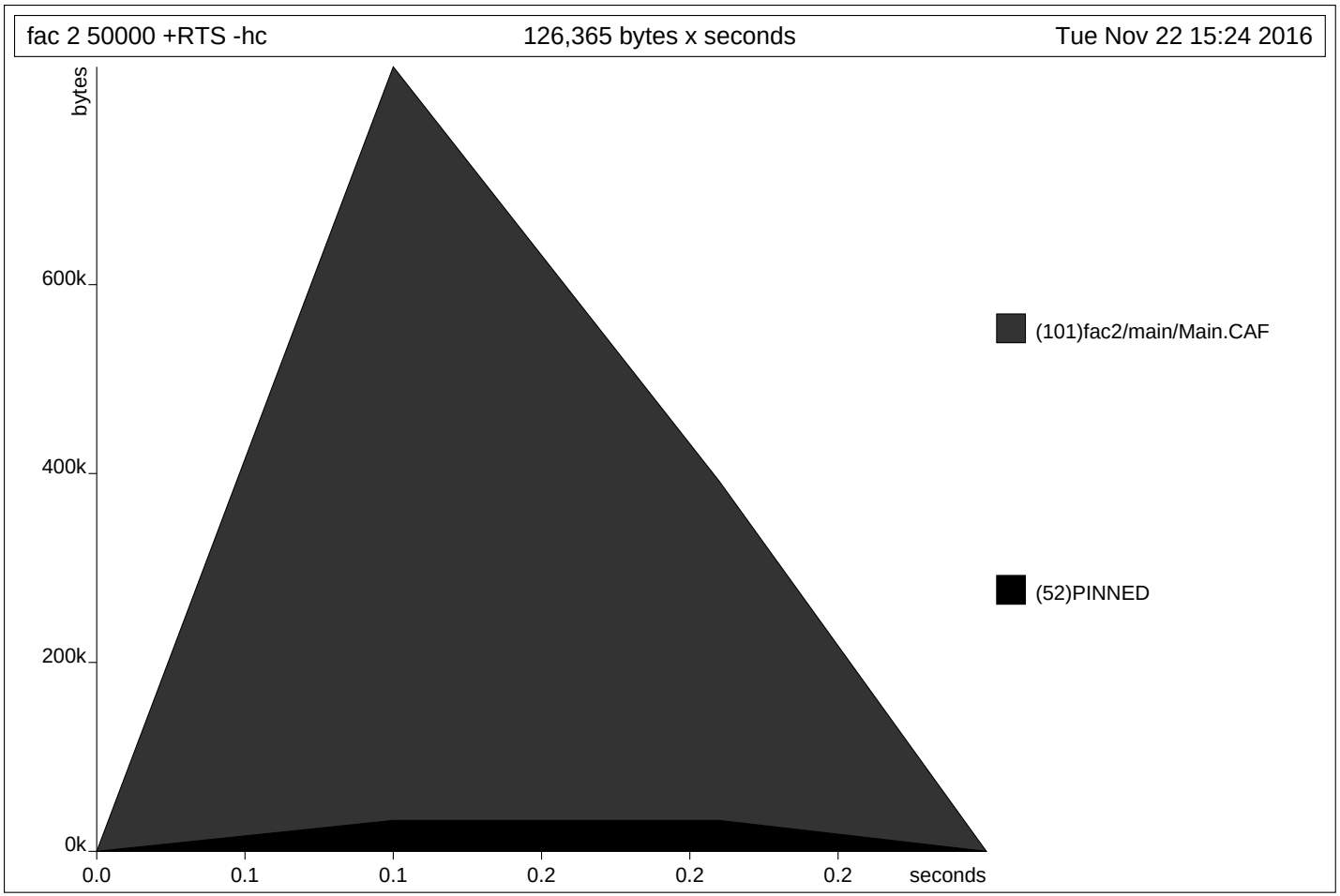
Speicherprofil: `fac1 50000`, nicht optimiert



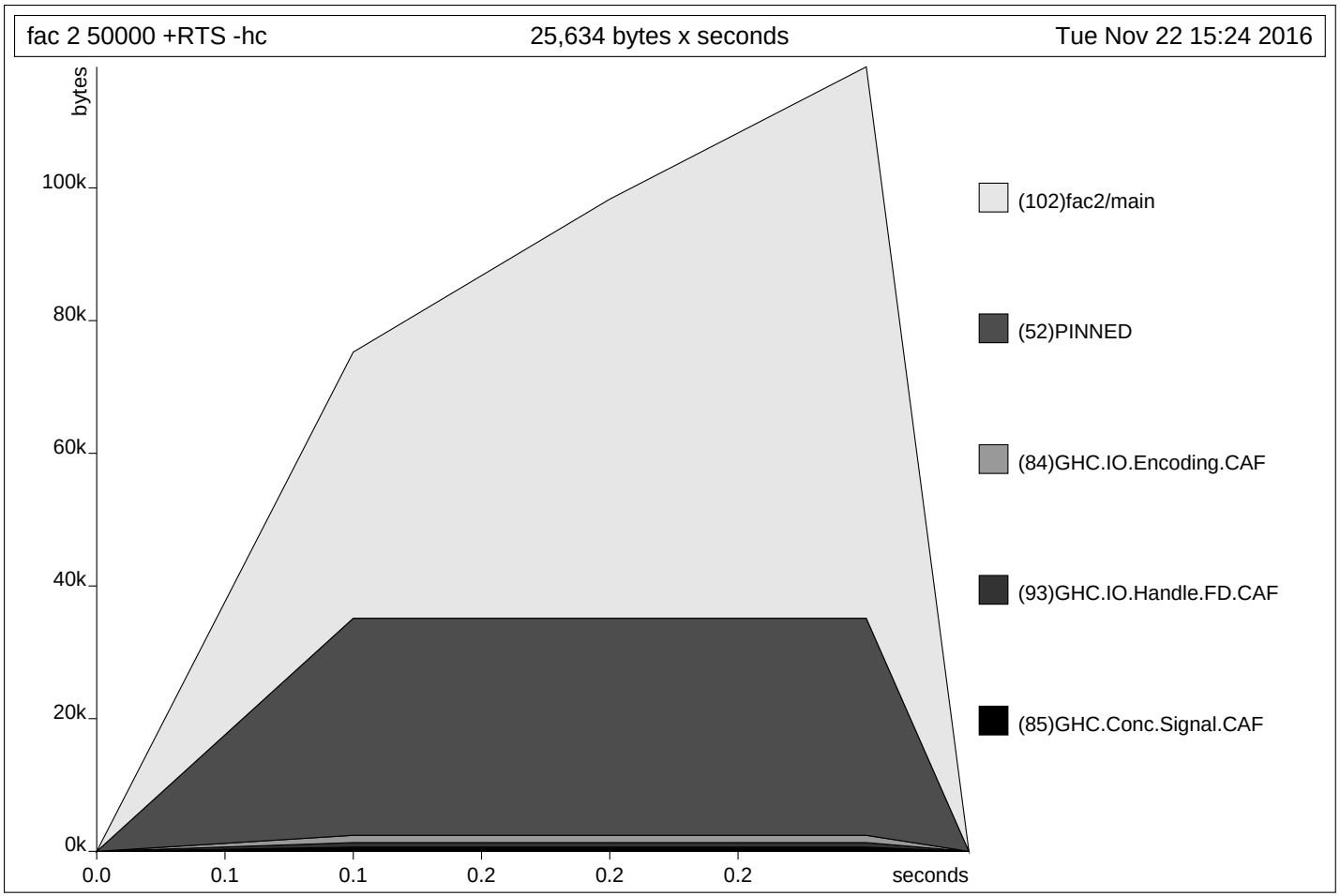
Speicherprofil: fac1 50000, optimiert



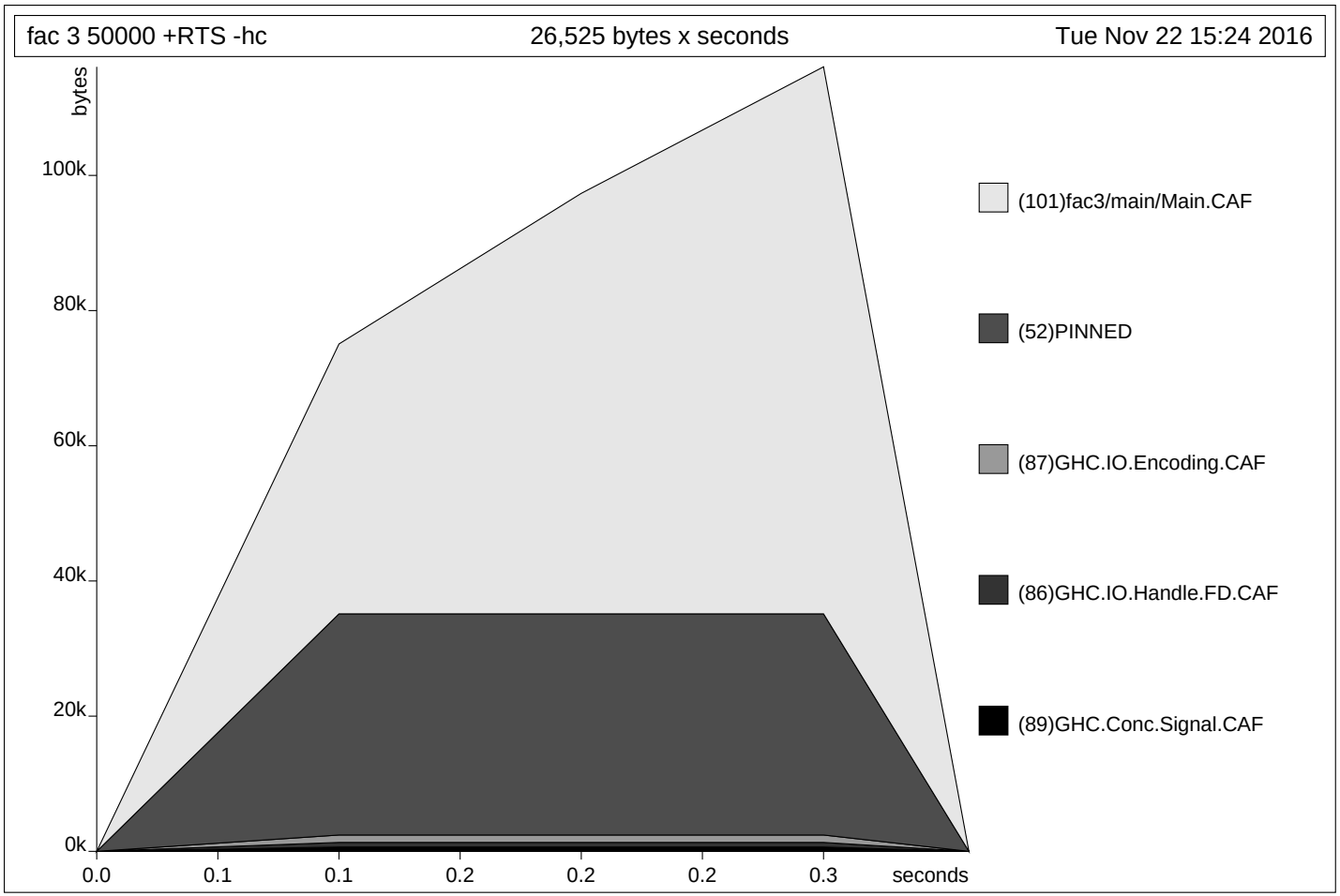
Speicherprofil: fac2 50000, nicht optimiert



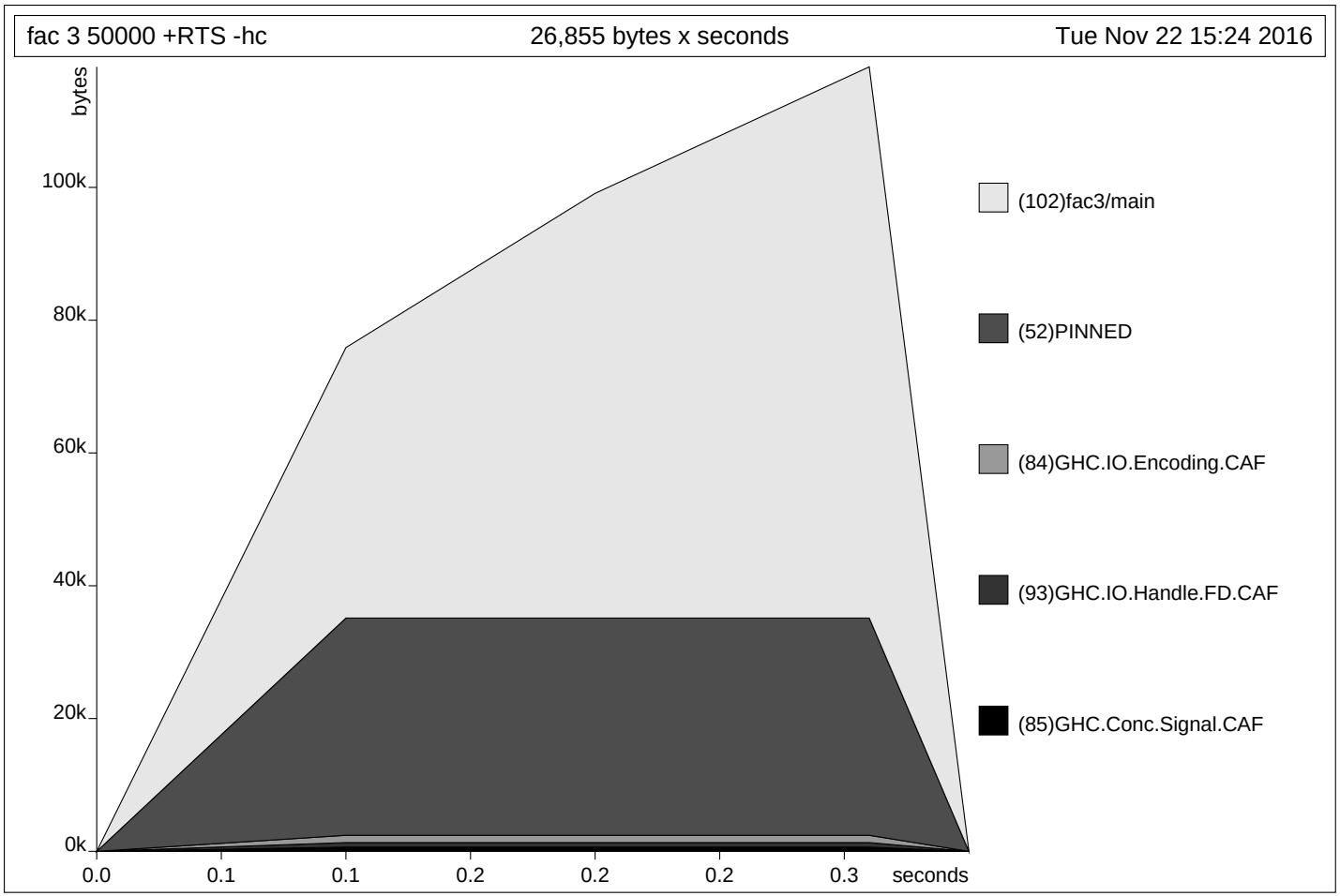
Speicherprofil: fac2 50000, optimiert



Speicherprofil: fac3 50000, nicht optimiert



Speicherprofil: fac3 50000, optimiert



Fazit Speicherprofile

- Endrekursion nur bei strikten Funktionen schneller
- Optimierung des *ghc*
  - Meist ausreichend für Striktheitsanalyse
  - Aber nicht für Endrekursion
- Deshalb:
  - Manuelle Überführung in Endrekursion sinnvoll
  - Compiler-Optimierung für Striktheit nutzen

Überführung in Endrekursion

- Voraussetzung 1: Funktion ist linear rekursiv
- Gegeben Funktion

$$
\begin{aligned}
&f' : S \to T \\
&f'\ x\ =\ \textbf{if}\ B\ x\ \ \textbf{then}\ H\ x \\
&\qquad\qquad\quad \textbf{else}\ (f'\ (K\ x)) \otimes\ (E\ x)
\end{aligned}
$$

  - Mit $K : S \to S$, $\otimes : T \to T \to T$, $E : S \to T$, $H : S \to T$.

- Voraussetzung 2: $\otimes$ assoziativ, $e : T$ neutrales Element
- Dann ist endrekursive Form:

$$
\begin{aligned}
&f : S \to T \\
&f\ x\ =\ g\ x\ e\ \textbf{where} \\
&\qquad g\ x\ y\ =\ \textbf{if}\ B\ x\ \ \textbf{then}\ (H\ x) \otimes\ y \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{else}\ g\ (K\ x)\ ((E\ x) \otimes\ y)
\end{aligned}
$$

Beispiel

- Länge einer Liste (nicht-endrekursiv)

```
length' :: [α]→ Int
length' xs = if null xs then 0
             else 1+length' (tail xs)
```

- Zuordnung der Variablen:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} K(x) & \mapsto & \text{tail } x & B(x) & \mapsto & \text{null } x \\ E(x) & \mapsto & 1 & H(x) & \mapsto & 0 \\ x \otimes y & \mapsto & x + y & e & \mapsto & 0 \end{array}$$

- Es gilt: $x \otimes e = x + 0 = x$ (0 neutrales Element)

Beispiel

- Damit endrekursive Variante:

```
length :: [α] → Int
length xs = len xs 0 where
  len xs y = if null xs then y — was: y+ 0
             else len (tail xs) (1+y)
```

- Allgemeines Muster:
  - Monoid $(\otimes, e)$: $\otimes$ assoziativ, e neutrales Element.
  - Zusätzlicher Parameter akkumuliert Resultat.

Weiteres Beispiel: foldr vs. foldl

- foldr ist nicht endrekursiv:

```
foldr :: (α → β → β) → β → [α] → β
foldr f z []     = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

- foldl ist endrekursiv:

```
foldl :: (α → β → α) → α → [β] → α
foldl f z []     = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs
```

Weiteres Beispiel: foldr vs. foldl

- foldr ist nicht endrekursiv:

```
foldr :: (α → β → β) → β → [α] → β
foldr f z []     = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

- foldl ist endrekursiv:

```
foldl :: (α → β → α) → α → [β] → α
foldl f z []     = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs
```

- foldl' ist strikt und endrekursiv:

```
foldl' :: (α→ β→ α)→ α→ [β]→ α
foldl' f a []     = a
foldl' f a (x:xs) = let a0= f a x in a0 `seq` foldl' f a0 xs
```

- Für Monoid $(\otimes, e)$ gilt: foldr ⊗ e l = foldl (flip ⊗) e l

Zusammenfassung

- map und `fold` sind kanonische Funktionen höherer Ordnung, und für alle Datentypen definierbar
- map, `filter`, `fold` sind ein nützliches, skalierbares und allgemeines Berechnungsmuster
- Effizient funktional programmieren:
  - Endrekursion: `while` für Haskell
  - Mit Striktheit und Endrekursion Speicherlecks vermeiden.
  - Für Striktheit Compileroptimierung nutzen
- Nächste Woche: Funktionale Programmierung im Großen — Abstrakte Datentypen