

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 9 vom 13.12.2016: Spezifikation und Beweis

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2016/17

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
 - ▶ Abstrakte Datentypen
 - ▶ Signaturen und Eigenschaften
 - ▶ Spezifikation und Beweis
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Formaler Beweis

- ▶ Warum?
 - ▶ Formaler Beweis zeigt **Korrektheit**
- ▶ Wie?
 - ▶ Formale Notation
 - ▶ Beweisformen (Schließregeln)
- ▶ Wozu?
 - ▶ Formaler Beweis zur **Analyse** des Algorithmus
 - ▶ Haskell als **Modellierungssprache**

Eigenschaften

- ▶ **Prädikate:**
 - ▶ Haskell-Ausdrücke vom Typ `Bool`
 - ▶ Quantifizierte Aussagen:
Wenn $P :: \alpha \rightarrow \text{Bool}$, dann ist $\text{ALL } x. P \ x :: \text{Bool}$ ein Prädikat und $\text{EX } x. P \ x :: \text{Bool}$ ein Prädikat
- ▶ Sonderfall Gleichungen $s == t$ und **transitive** Relationen
- ▶ Prädikate müssen **nicht ausführbar** sein

Wie beweisen?

- ▶ Beweis \longleftrightarrow Programmdefinition
 - Gleichungsumformung Funktionsdefinition
 - Fallunterscheidung Fallunterscheidung (Guards)
 - Induktion Rekursive Funktionsdefinition
- ▶ Wichtig: formale Notation

Notation

Allgemeine Form:

Sonderfall Gleichungen:

Lemma (1)	P		Lemma (2)	a = b	
\Leftrightarrow	P_1	— Begründung		a	
\Leftrightarrow	P_2	— Begründung	$=$	x_1	— Begründung
\Leftrightarrow	\dots		$=$	x_2	— Begründung
\Leftrightarrow	True		$=$	\dots	
			\square	$=$	b
					\square

Beweis durch vollständige Induktion

Zu zeigen:

Für alle natürlichen Zahlen x gilt $P(x)$.

Beweis:

- ▶ Induktionsbasis: $P(0)$
- ▶ Induktionsschritt:
 - ▶ Induktionsvoraussetzung $P(x)$
 - ▶ zu zeigen $P(x + 1)$

Beweis durch strukturelle Induktion (Listen)

Zu zeigen:

Für alle **endlichen** Listen xs gilt $P\ xs$

Beweis:

- ▶ Induktionsbasis: $P\ []$
- ▶ Induktionsschritt:
 - ▶ Induktionsvoraussetzung $P\ xs$
 - ▶ zu zeigen $P\ (x:xs)$

Beweis durch strukturelle Induktion (Allgemein)

Zu zeigen:

Für alle x in T gilt $P(x)$

Beweis:

- ▶ Für jeden Konstruktor C_i :
 - ▶ Voraussetzung: für alle $t_{i,j}$ gilt $P(t_{i,j})$
 - ▶ zu zeigen $P(C_i t_{i,1} \dots t_{i,k_i})$

Beweisstrategien

- ▶ Fold-Unfold:
 - ▶ Im Induktionsschritt Funktionsdefinition **auffalten**
 - ▶ Ausdruck umformen, bis Induktionsvoraussetzung anwendbar
 - ▶ Funktionsdefinitionen **zusammenfalten**
- ▶ Induktionsvoraussetzung **stärken**:
 - ▶ Stärkere Behauptung \implies stärkere Induktionsvoraussetzung, daher:
 - ▶ um Behauptung P zu zeigen, stärkere Behauptung P' zeigen, dann P als **Korollar**

Zusammenfassung

- ▶ Beweise beruhen auf:
 - ▶ Gleichungs- und Äquivalenzumformung
 - ▶ Fallunterscheidung
 - ▶ Induktion
- ▶ Beweisstrategien:
 - ▶ Sinnvolle Lemmata
 - ▶ Fold/Unfold
 - ▶ Induktionsvoraussetzung stärken
- ▶ Warum Beweisen?
 - ▶ Korrektheit von Haskell-Programmen
 - ▶ Haskell als **Modellierungssprache**