Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 6 vom 07.12.2020: Rekursive und zyklische Datenstrukturen

Christoph Lüth

Deutsches Forschungszentrum für Künstliche Intelligenz GmbH

Universität Bremen

Wintersemester 2020/21

Fahrplan

- **Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen**
  - Einführung
  - Funktionen
  - Algebraische Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Rekursive und zyklische Datenstrukturen
  - Funktionen höherer Ordnung II
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt

- **Rekursive** Datentypen und **zyklische** Daten
  - ... und wozu sie nützlich sind
  - Fallbeispiel: Labyrinth
- Performance-Aspekte

Lernziele

1. Wir verstehen, wie in Haskell „unendliche“ Datenstrukturen modelliert werden. Warum sind unendliche Listen nicht wirklich unendlich?
2. Wir wissen, worauf wir achten müssen, wenn uns die Geschwindigkeit unser Haskell-Programme wichtig ist.

I. Rekursive und Zyklische Datenstrukturen

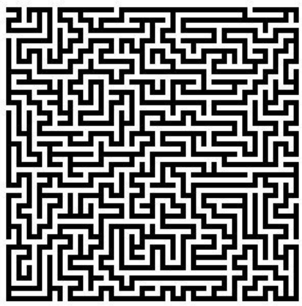
Konstruktion zyklischer Datenstrukturen

- **Zyklische** Datenstrukturen haben keine **endliche freie** Repräsentation
  - Nicht durch endlich viele Konstruktoren darstellbar
  - Sondern durch Konstruktoren und **Gleichungen**
- Einfaches Beispiel:

```
ones = 1 : ones
```

- Nicht-Striktheit erlaubt einfache Definition von Funktionen auf zyklische Datenstrukturen
- Aber: Funktionen können **divergieren**

Fallbeispiel: Zyklische Datenstrukturen



Quelle: docs.gimp.org

Modellierung eines Labyrinths

- Ein **gerichtetes** Labyrinth ist entweder
  - eine Sackgasse,
  - ein Weg, oder
  - eine Abzweigung in zwei Richtungen.
- Jeder Knoten im Labyrinth hat ein Label α.

```
data Lab α = Dead α
           | Pass α (Lab α)
           | TJnc α (Lab α) (Lab α)
```


Definition von Labyrinthen

Ein einfaches Labyrinth ohne Zyklen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 & \\ 2 \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \end{tikzcd}$$

Definition in Haskell:

```
s0 = TJnc 0 s1 s2
s1 = Dead 1
s2 = Pass 2 s3
s3 = TJnc 3 s1 s4
s4 = Dead 4
```

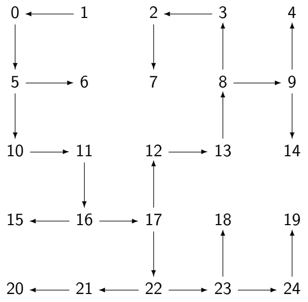
Ein einfaches Labyrinth mit Zyklen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 1 \arrow[l] & \\ 2 \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \end{tikzcd}$$

Definition in Haskell:

```
t0 = Pass 0 t2
t1 = Pass 1 t0
t2 = Pass 2 t3
t3 = TJnc 3 t1 t4
t4 = Dead 4
```

Ein Labyrinth (zyklenfrei)



Traversion des Labyrinths

- Ziel: **Pfad** zu einem gegeben **Ziel** finden
- Benötigt Pfade und Traversion
- Pfade: Liste von Knoten

```
type Path α = [α]
```

- Traversion: erfolgreich (Pfad) oder nicht erfolgreich

```
type Trav α = Maybe [α]
```


Traversionsstrategie

- Geht erstmal von **zyklenfreien** Labyrinth aus
- An jedem Knoten prüfen, ob Ziel erreicht, ansonsten
  - an Sackgasse: Fehlschlag (`Nothing`)
  - an Passagen: Weiterlaufen

```
cons :: α → Trav α → Trav α
cons _ Nothing      = Nothing
cons i (Just is) = Just (i: is)
```

  - an Kreuzungen: Auswahl treffen

```
select :: Trav α → Trav α→ Trav α
select Nothing t = t
select t    _ = t
```

- Erfordert Propagation von Fehlschlägen (in `cons` und `select`)

Zyklenfreie Traversion

- Zusammengesetzt:

```
traverse_1 :: (Show α, Eq α)⇒ α→ Lab α→ Trav α
traverse_1 t l
  | nid l == t = Just [nid l]
  | otherwise = case l of
    Dead _ → Nothing
    Pass i n → cons i (traverse_1 t n)
    TJnc i n m → cons i (select (traverse_1 t n)
                                 (traverse_1 t m))
```

DEMO

- Wie mit Zyklen umgehen?
- An jedem Knoten prüfen ob schon im Pfad enthalten.

Traversion mit Zyklen

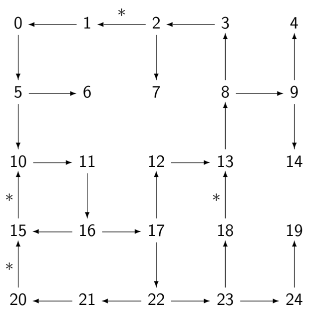
- Veränderte **Strategie**: Pfad bis hierher übergeben
  - Pfad muss hinten erweitert werden ($O(n)$)
  - Besser: Pfad **vorne** erweitern ($O(1)$), am Ende umdrehen
- Wenn aktueller Knoten in bisherigen Pfad enthalten ist, Fehlschlag
- Ansonsten wie oben

Traversion mit Zyklen

```
traverse_2 :: Eq α⇒ α→ Lab α→ Trav α
traverse_2 t l = trav_2 l [] where
  trav_2 l p
    | nid l == t = Just (reverse (nid l: p))
    | elem (nid l) p = Nothing
    | otherwise = case l of
    Dead _ → Nothing
    Pass i n → trav_2 n (i: p)
    TJnc i n m → select (trav_2 n (i: p)) (trav_2 m (i: p))
```

- Kritik:
  - Prüfung `elem` immer noch $O(n)$
  - Abhilfe: **Menge** der besuchten Knoten getrennt von aufgebautem **Pfad**
  - Erfordert effiziente Datenstrukturen für Mengen (`Data.Set`, `Data.IntSet`) ⟶ später

Ein Labyrinth (mit Zyklen)



Der allgemeine Fall: variadische Bäume

- Labyrinth ⟶ **Graph** oder **Baum**
- Labyrinth mit mehr als 2 Nachfolgern: **variadischer Baum**

```
data VTree α = NT α [VTree α]
```

  - Kürzere Definition erlaubt einfachere Funktionen:

```
traverse :: Eq α⇒ α→ VTree α→ Maybe [α]
traverse t vt = trav [] vt where
  trav p (NT l vs)
    | l == t = Just (reverse (l: p))
    | elem l p = Nothing
    | otherwise = select (map (trav (l: p)) vs)
```

DEMO

Traversion verallgemeinert

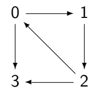
- Änderung der Parameter der Traversionsfunktion `trav`:

```
trav :: Eq α⇒ [(VTree α, [α])]→ Maybe [α]
```

  - Liste der nächsten **Kandidaten** mit **Pfad** der dorthin führt.
  - Algorithmus:
    1. Wenn Liste leer, Fehlschlag
    2. Wenn Liste nicht leer, ist der aktuelle Knoten der Kopf der Liste.
    3. Prüfe, ob aktueller Knoten das Ziel ist.
    4. Wenn nicht am Ziel und aktueller Knoten schon besucht, nächsten Kandidaten traversieren
    5. Ansonsten füge Kinder des aktuellem Knotens mit aktuellem Pfad zu Kandidaten hinzu und traversiere weiter
- Tiefensuche: Kinder **vorne** anfügen (Kandidatenliste ist ein **Stack**)
- Breitensuche: Kinder **hinten** anhängen (Kandidatenliste ist eine **Queue**)
- Andere Bewertungen möglich

Ein einfaches Beispiel

Ein einfaches Labyrinth mit Zyklen:



Definition in Haskell:

```
l00 = NT 0 [l01, l03]
l01 = NT 1 [l02]
l02 = NT 2 [l00, l03]
l03 = NT 3 [l00]
```

- Gesucht: Pfad von 0 zu 3
  - Tiefensuche: `[0, 1, 2, 3]`
  - Breitensuche: `[0, 3]`

Tiefensuche

```
depth_first_search :: Eq α⇒ α→ VTree α→ Maybe [α]
depth_first_search t vt = trav [(vt, [])] where
  trav [] = Nothing
  trav ((NT l ch, p):rest)
    | l == t    = Just (reverse (l:p))
    | elem l p  = trav rest
    | otherwise = trav (more++ rest) where
                    more = map (λc→ (c, l: p)) ch
```


Breitensuche

```
breadth_first_search :: Eq α⇒ α→ VTree α→ Maybe [α]
breadth_first_search t vt = trav [(vt, [])] where
  trav [] = Nothing
  trav ((NT l ch, p):rest)
    | l == t    = Just (reverse (l:p))
    | elem l p  = trav rest
    | otherwise = trav (rest ++ more) where
                    more = map (λc→ (c, l: p)) ch
```


Was zum Nachdenken

Übung 6.1: Wo ist der Stack?

Wo ist der Stack bei `traverse`, und warum läßt sich `traverse` nicht zu Breitensuche verallgemeinern?

Lösung: Der Stack ist bei `traverse` der Aufruf-Stack, implizit in dieser Zeile:

```
        select (map (trav (l: p)) vs)
```

Hier werden die Kinder in Stack-Order aufgerufen (Kinder der Kinder vor Geschwistern). Die Traversionsfunktion `trav` der Tiefen/Breitensuche hat dagegen keinen Aufruf-Stack; sie ist **endrekursiv** (und damit potenziell effizienter).

II. Vorteile der Nicht-Strikten Auswertung

Zyklische Listen

- Durch Gleichungen können wir **zyklische** Listen definieren.

```
nats :: [Integer]
nats = natsfrom 0 where
  natsfrom i = i: natsfrom (i+1)
```

- Repräsentation durch endliche, zyklische Datenstruktur
  - Kopf wird nur einmal ausgewertet.

```
fives :: [Integer]
fives = trace "***␣Foo!␣***" 5 : fives
```

- Es gibt keine **unendlichen** Listen, es gibt nur Berechnungen von Listen, die nicht terminieren.

Unendliche Weiten?

- Verschiedene Ebenen:
  - Mathematisch — unendliche Strukturen (natürliche Zahlen, Listen)
  - Implementierung — immer endlich (kann unendliche Strukturen **repräsentieren**)
- Berechnung auf unendlichen Strukturen: Vereinigung der Berechnungen auf allen **endlichen** Teilstrukturen
- Jede Berechnung hat **endlich** viele Parameter.
  - Daher nicht entscheidbar, ob Liste „unendlich" (zyklisch) ist:

```
isCyclic :: [a]→ Bool
```

Unendliche Listen und Nicht-Striktheit

- Nicht-Striktheit macht den Umgang mit zyklischen Datenstrukturen einfacher
- Beispiel: Sieb des Eratosthenes:
  - Ab wo muss ich sieben, um die n-Primzahl zu bereichnen?
  - Einfacher: Liste **aller** Primzahlen berechnen, davon n-te selektieren.

Fibonacci-Zahlen

- Aus der Kaninchenzucht.
- Sollte jeder Informatiker kennen.

```
fib1 :: Integer→ Integer
fib1 0 = 1
fib1 1 = 1
fib1 n = fib1 (n-1)+ fib1 (n-2)
```

- Problem: **exponentieller Aufwand**.

Fibonacci-Zahlen

- Lösung: zuvor berechnete **Teilergebnisse wiederverwenden**.
- Sei `fibs :: [Integer]` Strom aller Fibonaccizahlen:

```
           fibs  ⇝  [1, 1, 2, 3,  5,  8, 13, 21, 34, 55 .. ]
      tail fibs  ⇝  [1, 2, 3, 5,  8, 13, 21, 34, 55 .. ]
tail (tail fibs) ⇝  [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...]
```

- Damit ergibt sich:

```
fibs :: [Integer]
fibs = 1 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)
```

- n-te Fibonaccizahl mit `fibs !! n`:

```
fib2 :: Integer→ Integer
fib2 n = genericIndex fibs n
```

- **Aufwand**: **linear**, da `fibs` nur einmal ausgewertet wird.

Was zum Nachdenken.

Übung 6.1: Fibonacci

Es gibt eine geschlossene Formel für die Fibonacci-Zahlen:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

In Haskell (zählt ab 0):

```
fib3 :: Integer→ Integer
fib3 n = round ((1/sqrt 5)*(((1+ sqrt 5)/2)^(n+1)-((1- sqrt 5)/2)^(n+1)))
```

Was ist hier das Problem?

Lösung: Die Fließkommaarithmetik wird irgendwann (ab 74) ungenau.

III. Effizienzerwägungen

Beispiel: Listen umdrehen

- Liste umdrehen, **nicht** endrekursiv:

```
rev' :: [a]→ [a]
rev' []     = []
rev' (x:xs) = rev' xs ++ [x]
```

  - Hängt auch noch hinten an — $O(n^2)$!
- Liste umdrehen, **endrekursiv** und $O(n)$:

```
rev :: [a]→ [a]
rev xs = rev0 xs [] where
    rev0 []     ys = ys
    rev0 (x:xs) ys = rev0 xs (x:ys)
```

- Schneller weil geringere Aufwandsklasse, nicht nur wg. Endrekursion
- Frage: ist Endrekursion immer schneller?

Beispiel: Fakultät

- Fakultät **nicht** endrekursiv:

```
fac1 :: Integer→ Integer
fac1 n  = if n == 0 then 1 else n * fac1 (n-1)
```

- Fakultät endrekursiv:

```
fac2 :: Integer→ Integer
fac2 n     = fac' n 1 where
  fac' :: Integer→ Integer→ Integer
  fac' n acc = if n == 0 then acc
               else fac' (n-1) (n*acc)
```

- `fac1` verbraucht Stack, `fac2` nicht.
- Ist nicht merklich schneller?!

Verzögerte Auswertung und Speicherlecks

- **Garbage collection** gibt unbenutzten Speicher wieder frei.
  - **Unbenutzt**: Bezeichner nicht mehr Speicher im erreichbar
- Verzögerte Auswertung **effizient**, weil nur bei Bedarf ausgewertet wird
  - Aber Achtung: Speicherleck!
- Eine Funktion hat ein **Speicherleck**, wenn Speicher **unnötig** lange im Zugriff bleibt.
  - "Echte" Speicherlecks wie in C/C++ nicht möglich.
- Beispiel: `fac2`
  - Zwischenergebnisse werden nicht auswertet.
  - Insbesondere ärgerlich bei nicht-terminierenden Funktionen.

Striktheit

- **Strikte Argumente** erlauben Auswertung **vor** Aufruf
  - Dadurch **konstanter** Platz bei **Endrekursion**.
- Erzwungene Striktheit: `seq` :: $\alpha \to \beta \to \beta$

$$\bot \text{ `seq` } b = \bot$$
$$a \text{ `seq` } b = b$$

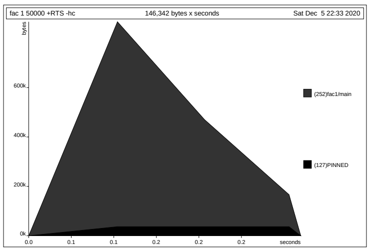
  - `seq` vordefiniert (nicht in Haskell definierbar)
  - `($!)` :: `(a→ b)→ a→ b` strikte Funktionsanwendung

```
f $! x = x ‘seq‘ f x
```

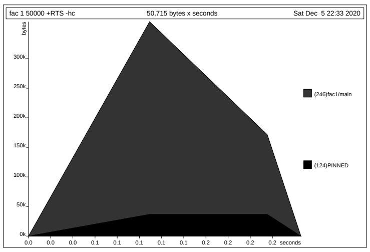
  - ghc macht Striktheitsanalyse
- Fakultät in konstantem Platzaufwand

```
fac3 :: Integer→ Integer
fac3 n = fac’ n 1 where
  fac’ n acc = seq acc (if n == 0 then acc
                        else fac’ (n-1) (n∗acc))
```

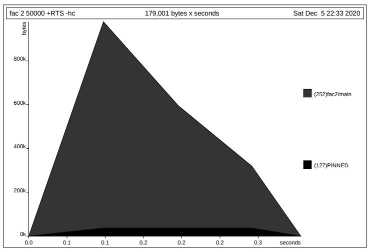

Speicherprofil: `fac1 50000`, nicht optimiert



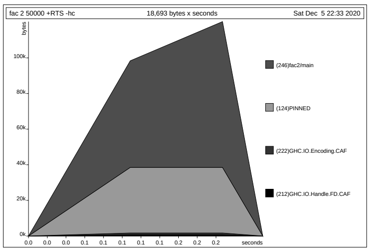
Speicherprofil: `fac1 50000`, optimiert



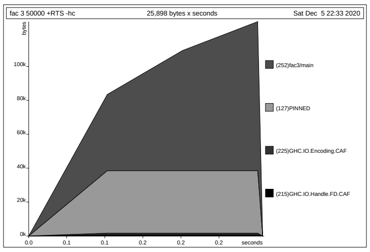
Speicherprofil: `fac2 50000`, nicht optimiert



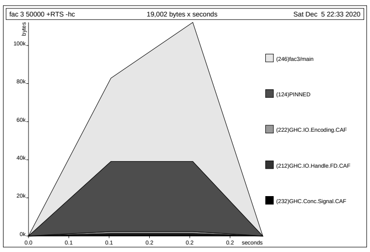
Speicherprofil: `fac2 50000`, optimiert



Speicherprofil: `fac3 50000`, nicht optimiert



Speicherprofil: `fac3 50000`, optimiert



Fakultät als Funktion höherer Ordnung

- Nicht end-rekursiv mit `foldr`:

```
fac_foldr :: Integer→ Integer
fac_foldr i = foldr (∗) 1 [1.. i]
```

- End-rekursiv mit `foldl`:

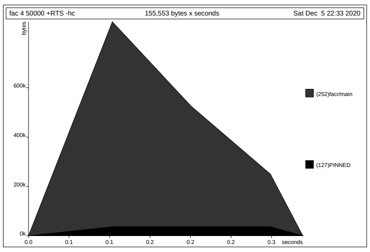
```
fac_foldl :: Integer→ Integer
fac_foldl i = foldl (∗) 1 [1.. i]
```

- End-rekursiv und strikt mit `foldl’`:

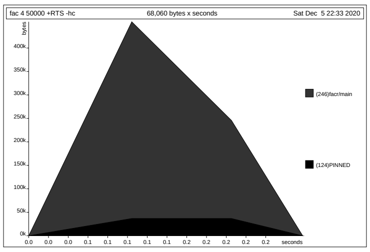
```
fac_foldl’ :: Integer→ Integer
fac_foldl’ i = foldl’ (∗) 1 [1.. i]
```

- **Exakt** die gleichen Ergebnisse!

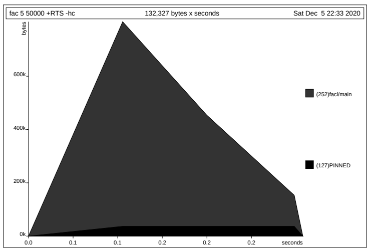
Speicherprofil: `foldr 50000`, nicht optimiert



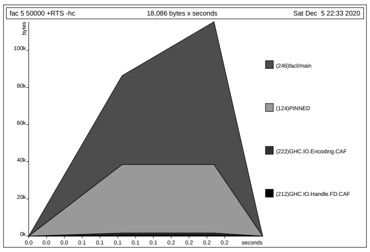
Speicherprofil: `foldr 50000`, optimiert



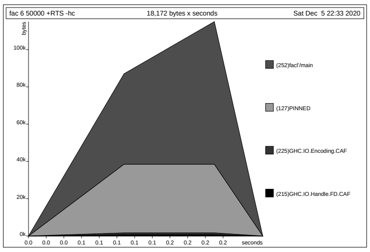
Speicherprofil: `foldl 50000`, nicht optimiert



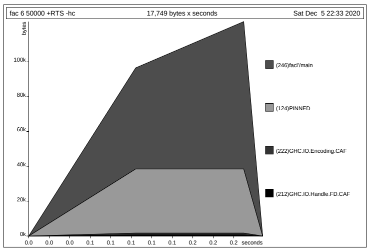
Speicherprofil: `foldl 50000`, optimiert



Speicherprofil: `foldl' 50000`, nicht optimiert



Speicherprofil: `foldl' 50000`, optimiert



Fazit Speicherprofile

- Endrekursion **nur** bei **strikten Funktionen** schneller
- Optimierung des *ghc*
  - Meist ausreichend für Striktheitsanalyse
  - Aber **nicht** für Endrekursion
- Deshalb:
  - **Manuelle** Überführung in Endrekursion **sinnvoll**
  - **Compiler-Optimierung** für Striktheit nutzen

Zusammenfassung

- Rekursive Datentypen können **zyklische Datenstrukturen** modellieren
  - Das Labyrinth — Sonderfall eines **variadischen Baums**
  - Unendliche Listen — nützlich wenn Länge der Liste nicht im voraus bekannt
- Effizienzerwägungen:
  - Überführung in Endrekursion sinnvoll, Striktheit durch Compiler