Ergänzungen zu offenen und abgeschlossenen Mengen

Definition
Ist L Teilmenge eines topologischen Raums M, so heißt $x \in L$ *innerer Punkt von* L, wenn es eine offene Umgebung von x gibt, die ganz in L liegt.
(Man erinnere sich, daß eine offene Umgebung eines Punktes einfach nur eine offene Menge ist, die den Punkt als Element enthält.)

Satz
Eine Teilmenge U von M ist genau dann offen, wenn jeder Punkt von U innerer Punkt ist.

Beweis:
Ist $U \subset M$ offen und $x \in U$ beliebig, so ist U selbst schon eine offene Umgebung von x, die ganz in U enthalten ist. Jeder Punkt von U ist also innerer Punkt.
Ist umgekehrt jeder Punkt von U innerer Punkt, so gibt es zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $U(x) \subset U$. Offenbar ist dann $U = \bigcup_{x \in U} U(x)$, und U ist als Vereinigung offener Mengen offen.

Satz
Eine Teilmenge $A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A Element von A ist.

Man erinnere sich, daß ein Häufungspunkt x_0 einer Teilmenge $L \subset M$ die Eigenschaft besitzt, daß jede offene Umgebung von x_0 Punkte von L enthält, die von x_0 verschieden sind.

Bemerkung:
Die Bedingung des Satzes ist offenbar erfüllt, wenn A gar keine Häufungspunkte besitzt.
Eine Menge ohne Häufungspunkte nennt man auch *diskret*. Diskrete Mengen sind also abgeschlossen.

Beweis:
Sei A abgeschlossen. Nehmen wir an, x_0 sei ein Häufungspunkt von L und es sei $x_0 \notin L$. Dann ist also $x_0 \in U := M - L$, und diese Menge ist offen. Damit ist U eine offene Umgebung von x_0, die keine Punkte von L enthält, so daß x_0 doch kein Häufungspunkt von L sein kann.
Daher muß doch $x_0 \in L$ gelten.
Umgekehrt seien alle Häufungspunkte von L, so es welche gibt, in L enthalten. Dann gibt es also in *M-L* keinen Häufungspunkt von L. Ist daher $x \in M - L$, so muß es eine offene Umgebung $U(x)$ geben, die keine Punkte von L enthält, die also ganz in $M - L$ liegt. Damit ist jeder Punkt von *M-L* ein innerer Punkt, daher *M-L* offen und L abgeschlossen.

Kompaktheit

Es handelt sich um einen zentralen Begriff der Analysis und der Topologie.

Definition
Ist M eine Menge, $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von M und $L \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, so nennt man die Familie eine *Überdeckung* von L. Ist M ein topologischer Raum und sind alle U_i offen, so spricht man von einer *offenen Überdeckung*.

Ist $J \subset I$ und die Teilfamilie $(U_i)_{i\in J}$ immer noch eine Überdeckung von L , so spricht man von einer *Teilüberdeckung* . Die Teilüberdeckung nennt man endlich, wenn J endlich ist.

Definition
Eine Teilmenge K eines topologischen Raums M heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Beispiele:
Trivialerweise ist jede endliche Teilmenge eines topologischen Raums kompakt.
Gibt es in einem topologischen Raums nur endlich viele offene Mengen wie beispielsweise bei der groben Topologie, so ist jede Teilmenge des Raums kompakt.

Satz 1 Endliche abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind kompakt.
Satz 2 In einem Hausdorffraum sind kompakte Mengen abgeschlossen.
Satz 3 In einem metrischen Raum sind kompakte Mengen beschränkt.
Satz 4 Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.
Satz 5 Produkte kompakter Mengen sind kompakt.

Da sich eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge eines Produkts abgeschlossener Intervalle auffassen läßt, ist sie nach Satz 1, Satz 5 und Satz 4 kompakt. Aufgrund von Satz 2 und Satz 3 kennen wir damit alle kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Also gilt:

Satz 6 Die kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind genau die abgeschlossenen und beschränkten Mengen.

Wir haben an anderer Stelle gesehen, daß dieses Ergebnis in unendlichdimensionalen Banachräumen nicht mehr richtig ist: die Menge der kanonischen Einheitsvektoren im Raum der reellwertigen quadratsummierbaren Folgen ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt.

Satz 7 Bildmengen kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt.
Satz 8 Folgen in einer kompakten Menge besitzen mindestens einen Häufungspunkt.
Satz 9 Eine stetige reellwertige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge Maximum und Minimum an.

Im Folgenden schreiben wir diese Sätze noch einmal hin und beweisen sie.

Satz 1 Sind $a, b \in \mathbb{R},\ a<b$, so ist das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Beweis: Wir wenden dieselbe Technik an wie beim Beweis, daß abgeschlossene Intervalle zusammenhängend sind: Ausgehend von einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ von $[a,b]$ konstruieren wir die Menge $L := \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ besitzt eine endliche Teilüberdeckung von } \mathfrak{U}\}$.
Wegen $a \in L$ ist L nicht-leer , und offenbar ist b eine obere Schranke für L . Also existiert die kleinste obere Schranke s:=sup$L$; wenn wir $s=b\in L$ zeigen können, sind wir fertig.
Zunächst wissen wir aber nur, daß $a \leqslant s \leqslant b$.

Da es eine offene Menge U in $\mathfrak{U}$ geben muß, die a enthält, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $[a, a+\epsilon] \subset U$. Das heißt aber, daß das Intervall $[a, a+\epsilon]$ bereits von einer einzigen Menge in $\mathfrak{U}$ überdeckt wird. Daher ist $a+\epsilon \in L$, also $a+\epsilon \leqslant s$, also $a < s$.
Es muß $s \in U$ für ein U in $\mathfrak{U}$ gelten. Dann gibt es ein $x \in U$ mit $a < x < s$ und $[x, s] \in U$ und $x \in L$, also besitzt $[a, x]$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathfrak{U}$. Da zusätzlich $[x, s]$ allein von U überdeckt wird, besitzt auch $[a,s]$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathfrak{U}$, also ist $s \in L$.

Wir nehmen jetzt an, daß $s<b$ und führen dies zum Widerspruch.
Wir finden diesmal eine Menge U in $\mathfrak{U}$ mit $s \in U$, also ein ganzes Intervall $[s, s+\epsilon] \subset U$ mit $s+\epsilon < b$. Da dieses Intervall von einer einzigen Menge, nämlich U, und das Intervall $[a,s]$ von endlich vielen Mengen in $\mathfrak{U}$ überdeckt wird, gilt dies auch für das Intervall $[a, s+\epsilon]$, also ist $s+\epsilon \in L$, und damit ist s keine obere Schranke von L. Widerspruch!

Satz 2 In einem Hausdorffraum sind kompakte Mengen abgeschlossen.

Beweis:
Sei M hausdorffsch und $K \subset M$ kompakt.
Wäre K nicht abgeschlossen, so gäbe es einen Häufungspunkt x_0 von K, der nicht in K, daher in M-K liegt. Zu jedem $x \in K$ wählen wir disjunkte offene Umgebungen $U(x)$ und $V^x(x_0)$. An dieser Stelle geht ein, daß M hausdorffsch ist. Die $(U(x))_{x \in K}$ bilden eine offene Überdeckung von K, die wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $U(x_1), \ldots, U(x_N)$ besitzt, d.h. es ist $U := U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_N) \supset K$. Setzen wir $V(x_0) := V^{x_1}(x_0) \cap \ldots \cap V^{x_N}(x_0)$, so ist diese offene Umgebung von x_0 disjunkt von U auf Grund obiger Konstruktion. Da x_0 Häufungspunkt von K ist, enthält jede offene Umgebung von x_0, also auch $V(x_0)$, Punkte von K. Dann können aber die $U(x_1), \ldots, U(x_N)$ nicht ganz K überdecken, und wir haben einen Widerspruch. Also ist K doch abgeschlossen.

Eine Teilmenge B eines metrischen Raums M heißt *beschränkt*, wenn es ein $x_0 \in M$ und ein $r \in \mathbb{R}, r > 0$ gibt mit $B \subset U_r(x_0)$, wenn also B Teilmenge einer offenen Kugel ist.

Satz 3 Eine kompakte Teilmenge K eines metrischen Raums M ist beschränkt.

Beweis
Ist K nicht beschränkt, so wähle man ein $x_0 \in M$ und betrachte die offenen Kugeln $(U_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$. Da offenbar $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n(x_0)$, bilden sie eine offene Überdeckung von K. Wegen der Kompaktheit von K reichen schon endlich viele dieser Kugeln, und damit die größte von ihnen, aus, um K zu überdecken. Daher ist K doch beschränkt.

Satz 4 Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.

Beweis
Sei K eine kompakte Teilmenge des topologischen Raums M und $L \subset K$ abgeschlossen. Sei weiterhin $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von L. Indem wir die offene Menge $U := M - L$ hinzunehmen, erhalten wir eine offene Überdeckung von ganz M und damit von K. Da K kompakt

ist, reicht eine endliche Teilüberdeckung aus, d.h. wir haben $K \subset U \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_N}$. Da $L \subset K$ und $L \cap U = \emptyset$, muß $L \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_N}$ gelten, d.h. wir haben eine endliche Teilüberdeckung der Ausgangsüberdeckung von L gefunden, L ist somit kompakt.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 5 benötigen wir den Begriff der *Verfeinerung einer Überdeckung* , der oft wichtiger ist als der Begriff der Teilüberdeckung und diesen umfaßt:

Definition:
Sind $(U_i)_{i \in I}$ und $(V_j)_{j \in J}$ Überdeckungen einer Menge K , so nennt man die zweite Überdeckung eine *Verfeinerung* der ersten, wenn es eine Abbildung $\sigma : J \to I$ gibt, so daß $\forall\, j \in J : V_j \subset U_{\sigma(j)}$.

Satz:
Eine Teilmenge K eines topologischen Raums M ist genau dann kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Verfeinerung besitzt.

Beweis: Ist K kompakt, so besitzt die Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung. D.h. es gibt eine endliche Teilmenge $J \subset I$, so daß auch $(U_j)_{j \in J}$ eine Überdeckung von K ist. Indem wir für $\sigma : J \to I$ die Inklusionsabbildung $\sigma(j) = j$ wählen, wird $(U_j)_{j \in J}$ zu einer Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I}$.

Ist umgekehrt $(V_j)_{j \in J}$ eine endliche Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I}$ mit zugehörigem $\sigma : J \to I$, so setze man $K := \sigma(J)$. K ist eine endliche Teilmenge von I und damit haben wir wegen $\bigcup_{k \in K} U_k = \bigcup_{j \in j} U_{\sigma(j)} \supset \bigcup_{j \in J} V_j \supset K$ mit $(U_k)_{k \in K}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$; somit ist K kompakt.

Satz 5
Sind M, N topologische Räume, $K \subset M$, $L \subset N$ kompakt.
Dann ist $K \times L$ kompakt in $M \times N$.

Wir benutzen diesen Satz, um ausgehend von $\mathbb{R}$ die kompakten Mengen im $\mathbb{R}^n$ zu charakterisieren. Als Topologie auf $M \times N$ nehmen wir natürlich die Produkttopologie, deren Basis die Produkte offener Mengen in M und N sind. Im Beweis benötigen wir den eben eingeführten Begriff der Verfeinerung.

Beweis:
Wir beginnen mit einer offenen Überdeckung $(W_i)_{i \in I}$ von $K \times L$ und definieren $\sigma : K \times L \to I$, indem wir jedem Punkt $(x, y) \in K \times L$ ein $i \in I$ zuordnen, so daß $(x, y) \in W_i$. Die Existenz eines solchen $i \in I$ ist gesichert, weil die $(W_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $K \times L$ ist. Es muß nun – schließlich bilden die Produkte offener Mengen eine Basis der Produkttpologie – offene Mengen U_{xy} in M und V_{xy} in N geben mit $(x, y) \in U_{xy} \times V_{xy} \subset W_{\sigma(x, y)}$. Also ist $(U_{xy} \times V_{xy})_{(x, y) \in K \times L}$ eine offene Verfeinerung von $(W_i)_{i \in I}$. Wenn wir davon wiederum eine endliche offene Verfeinerung finden, haben wir insgesamt eine endliche offene Verfeinerung der Ausgangsüberdeckung und damit die Kompaktheit von $K \times L$.

Dazu gehen wir aus von einem beliebigen aber festen $x \in K$. Die „Faser“ $\{(x, y) | y \in L\}$ ist offenbar eine Teilmenge von $\bigcup_{y \in L} U_{xy} \times V_{xy}$ und daher muß $L \subset \bigcup_{y \in L} V_{xy}$ gelten. Damit haben wir eine offene Überdeckung von L und die Kompaktheit von L garantiert die Existenz einer endlichen Teilmenge $L_x \subset L$, so daß $L \subset \bigcup_{y \in L_x} V_{xy}$. Wir erhalten so eine offene Umgebung

$U_x := \bigcap_{y \in L_x} U_{xy}$ von x.

Die $(U_x)_{x \in K}$ bilden nun wiederum eine offene Überdeckung von K; es gibt daher eine endliche Teilmenge $\widetilde{K} \subset K$, so daß K bereits durch die $(U_x)_{x \in \widetilde{K}}$ überdeckt wird. Jetzt bilden die endlich vielen Produkte $U_x \times V_{xy}$ mit $x \in \widetilde{K}$ und $y \in L_x$ eine offene Überdeckung von $K \times L$.
Da $U_x \times V_{xy} \subset U_{xy} \times V_{xy}$, ist dies eine endliche Verfeinerung von $(U_{xy} \times V_{xy})_{(x, y) \in K \times L}$, welches wiederum eine Verfeinerung der ursprünglichen Überdeckung $(W_i)_{i \in I}$ von $K \times L$ war.
Damit haben wir eine endliche Verfeinerung von $(W_i)_{i \in I}$ gefunden, und $K \times L$ ist kompakt.

Bemerkung:
Es sollte klar sein, daß man hier induktiv von einem Produkt zweier zu einem Produkt endlich vieler Mengen übergehen kann. Da wir obigen Produktsatz bei der Charakterisierung der kompakten Mengen in $\mathbb{R}^n$ benutzen wollen, wäre strenggenommen noch zu zeigen, daß die durch die gewöhnliche Topologie auf $\mathbb{R}$ induzierte Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n$ dieselbe ist wie die, die durch die uns bekannten Metriken gegeben wird.

Satz 7
Eine stetige Abbildung $f: M \to N$ zwischen topologischen Räumen bildet kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab. D.h. ist $K \subset M$ kompakt, so auch $f(K) \subset N$.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Wegen der Stetigkeit von f sind die Urbilder $U_i := f^{-1}(V_i)$ sämtlich offen und bilden daher eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $U_{i_1} \dots U_{i_N}$ von K, also
$K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_N}) = f^{-1}(V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_N})$. Daraus folgt aber, daß $f(K) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_N}$, und damit sind die $V_{i_1} \dots V_{i_N}$ eine endliche Überdeckung von $f(K)$. Damit ist $f(K)$ kompakt.

Satz 8
Eine Folge mit Werten in einer kompakten Menge K besitzt mindestens einen Häufungswert in K.

Beweis:
Wird in der Folge ein Wert unendlich oft angenommen, so ist dieser Wert ein Häufungswert, und wir sind fertig.
Haben wir eine Folge, in der kein Wert unendlich oft angenommen wird, so können wir durch Weglassen von Folgengliedern, die schon einmal vorkamen, eine Teilfolge konstruieren, deren sämtliche Werte verschieden sind. Wenn wir von dieser einen Häufungspunkt finden, ist der natürlich auch Häufungspunkt der Ausgangsfolge.
Wir gehen also im Folgenden von einer Folge in K aus, deren sämtliche Werte verschieden sind und bilden ihre Wertemenge $L := \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Wenn L einen Häufungspunkt besitzt, muß dieser in K liegen, da K ja abgeschlossen ist. Ein solcher Häufungspunkt von L ist natürlich ein Häufungswert der Folge.

Die Möglichkeit, daß L keinen Häufungspunkt besitzt, soll zum Widerspruch geführt werden. Dann wäre L nämlich diskret, also abgeschlossen (siehe oben) und als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K selbst kompakt. Wegen der Diskretheit wählen wir zu jedem x in L eine Umgebung $U(x)$, die außer x keine weiteren Elemente von L enthält. Die $(U(x))_{x\in L}$ bilden eine offene Überdeckung von L . Eine endliche Teilüberdeckung enthielte dann nur endlich viele Elemente von L , also nicht ganz L . Damit haben wir den gesuchten Widerspruch.

Satz 9
Sei M ein topologischer Raum und $f:M\to\mathbb{R}$ stetig. Ist $K\subset M$ kompakt, so gibt es ein $x_0\in K$ mit $\forall x\in K:\ f(x)\leqslant f(x_0)$, d.h. $f(x_0)=\max_{x\in K} f(x)$.

Beweis:
Wir zeigen zunächst, daß f auf K nach oben beschränkt ist.
Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $x\in K$ und jedem $\epsilon>0$ eine Umgebung $U(x)$, so daß $\forall y\in U(x):|f(y)-f(y)|<\epsilon$. Mit $\epsilon=1$ folgt $\forall y\in U(x): f(y)\leqslant f(x)+1$. Die $U(x)$ bilden eine offene Überdeckung von K und daher reichen endlich viele $U(x_1),\ldots,U(x_N)$, um K zu überdecken. Dann folgt: $\forall y\in K:\ f(y)\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} f(x_i)+1$; daher ist f nach oben beschränkt.

Daher existiert $s:=\sup_{x\in K} f(x)$.

Wenn es ein $x_0\in K$ gibt mit $f(x_0)=s$, so wäre $f(x_0)=\max_{x\in K} f(x)$ und der Beweis erbracht.
Nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall.
Dann gäbe es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein Element $x_n\in K$ mit $f(x_n)\geqslant s-\frac{1}{n}$.
Da K kompakt ist, besitzt diese Folge einen Häufungswert $x_0\in K$, und eine Teilfolge (y_n) besitzt x_0 als Grenzwert. Da wegen der Stetigkeit von f $\lim_{n\to\infty} f(y_n)=f(x_0)$ und andererseits $f(y_n)\geqslant s-\epsilon_n$ für eine Nullfolge (ϵ_n) , muß $f(x_0)\geqslant s$ gelten. Da natürlich auch $f(x_0)\leqslant s$, sind wir fertig.