

Integration durch Partialbruchzerlegung

Setzt man für zwei Polynome P, Q mit reellen Koeffizienten $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, so erhält man eine sog. „rationale Funktion“. Besitzt der Nenner in einem Intervall $[a, b]$ keine Nullstelle, so ist R stetig, so daß $\int_a^b R(x) dx$ existiert. Im folgenden wird eine Technik entwickelt, mit der man solche Integrale konkret ausrechnen kann.

Zunächst überlegt man sich, daß mit jeder komplexen Nullstelle a von Q auch \bar{a} eine Nullstelle ist. Sind nun $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ die reellen Nullstellen von Q und $b_1, \bar{b}_1, \dots, b_m, \bar{b}_m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ die nicht-reellen Nullstellen, so gibt es eine Darstellung

$$Q(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{j_i} \prod_{i=1}^m ((x - b_i)(x - \bar{b}_i))^{k_i} = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{j_i} \prod_{i=1}^m (x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^{k_i}, \text{ wobei } \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0,$$

wobei die letzte Bedingung bedeutet, daß die quadratischen Terme in der zweiten Produktgruppe keine reelle Nullstelle besitzen. Wir dürfen natürlich oBdA annehmen, daß das Polynom Q normiert ist, also den Leitkoeffizienten 1 hat. Außerdem nehmen wir an, daß $\text{grad } P < \text{grad } Q$.

Man macht nun den Ansatz $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{j_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^j}$ mit Konstanten A_i^j, B_i^j, C_i^j

Offenbar ist $Q(x)$ der Hauptnenner der Brüche der rechten Seite.

Indem man alles auf diesen Hauptnenner bringt, erhält man durch Koeffizientenvergleich mit $P(x)$ ein lösbares lineares Gleichungssystem für die obigen Konstanten.

Dies macht man sich am besten an einem Beispiel klar:

$$Q(x) = (x-1)^2(x-1+i)^2(x-1-i)^2 = (x-1)^2(x^2-2x+2)^2 = x^6 - 6x^5 + 17x^4 - 28x^3 + 28x^2 - 16x + 4$$

$$P(x) = x^3 + x + 1$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 - 2x + 2} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 - 2x + 2)^2} =$$

$$(A_{11} + B_{11})x^5 + (-5A_{11} + A_{12} - 4B_{11} + C_{11})x^4 + (12A_{11} - 4A_{12} + 7B_{11} - 4C_{11} + B_{12})x^3 +$$

$$(-16A_{11} + 8A_{12} - 6B_{11} + 7C_{11} - 2B_{12} + C_{12})x^2 + (12A_{11} - 8A_{12} + 2B_{11} - 6C_{11} + B_{12} - 2C_{12})x +$$

$$(-4A_{11} + 4A_{12} + 2C_{11} + C_{12}) / (x^6 - 6x^5 + 17x^4 - 28x^3 + 28x^2 - 16x + 4)$$

Es ergeben sich also die Gleichungen:

$$A_{11} + B_{11} = 0, \quad -5A_{11} + A_{12} - 4B_{11} + C_{11} = 0, \quad 12A_{11} - 4A_{12} + 7B_{11} - 4C_{11} + B_{12} = 1,$$

$$-16A_{11} + 8A_{12} - 6B_{11} + 7C_{11} - 2B_{12} + C_{12} = 0, \quad 12A_{11} - 8A_{12} + 2B_{11} - 6C_{11} + B_{12} - 2C_{12} = 1,$$

$$-4A_{11} + 4A_{12} + 2C_{11} + C_{12} = 1$$

Natürlich sollte man für eine solche Rechnung ein Computeralgebra-Programm benutzen: konkret wurde hier Pari-gp verwendet.

Wesentlich ist, daß durch Koeffizientenvergleich mit $P(x)$ ein lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen für die 6 zu bestimmenden Konstanten entsteht. Dieses Gleichungssystem ist immer lösbar! Jedoch führt eine Begründung jetzt zu weit!

In unserem Beispiel ergibt sich $A_{11} = 4, A_{12} = 3, B_{11} = -4, C_{11} = 1, B_{12} = -3, C_{12} = 3$. (Probe!!)

Wir gehen also im Folgenden davon aus, daß wir die Konstanten bestimmen können.

Anschließend geht es um die Berechnung der Einzelintegrale.

Dabei treten die folgenden Fälle auf, die man aber alle beherrscht:

$$1. \int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a|$$

$$2. \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-n+1}{(x-a)^{n-1}}, \quad n > 1$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2+px+q} \quad \text{mit} \quad -p^2+4q > 0 ;$$

man setze $r = \sqrt{q-p^2/4}$ und $y = \frac{x-p/2}{r}$, also $dy = \frac{dx}{r}$, also $dx = r dy$. Dann gilt

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x-p/2)^2 - p^2/4 + q} = \frac{1}{r^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-p/2}{r}\right)^2 + 1} = \frac{1}{r} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{r} \arctan y$$

$$4. \int \frac{x dx}{x^2+px+q} \quad \text{mit} \quad -p^2+4q > 0 ;$$

$$\int \frac{x dx}{x^2+px+q} = \int \frac{x dx}{(x-p/2)^2 - p^2/4 + q} = \frac{1}{r^2} \int \frac{x dx}{\left(\frac{x-p/2}{r}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{1}{r^2} \int \frac{\frac{x-p/2}{r}}{\left(\frac{x-p/2}{r}\right)^2 + 1} dx + \frac{p}{2r^3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-p/2}{r}\right)^2 + 1}$$

Das zweite Integral in der letzten Zeile unten wurde oben schon behandelt. Für das erste gilt mit der zusätzlichen Substitution $z = y^2$, $\frac{1}{2} dz = dy$:

$$\frac{1}{r^2} \int \frac{\frac{x-p/2}{r}}{\left(\frac{x-p/2}{r}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{r} \int \frac{y dy}{y^2+1} = \frac{1}{2r} \int \frac{dz}{z+1} = \frac{1}{2r} \log|z+1|$$

Die Behandlung der Integrale

5. $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ und 6. $\int \frac{x dx}{(x^2+px+q)^n}$, die ja ebenfalls auftreten können, sei zunächst den Leser/innen überlassen.