Differentialgeometrie, SS 2009
Michael Hortmann

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1

Kruskal vs. Schwarzschild
Wir betrachten die offene Menge $U=\left\{(v,u)\in\mathbb{R}^2 \middle| u^2-v^2>-1\right\}$ und darauf die pseudoriemannsche Metrik $\eta=\frac{4}{r}e^{-r}(-\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v+\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u)$, wobei die Funktion r implizit gegeben ist durch $(r-1)e^r=u^2-v^2$. Dies bedeutet, daß r=1 gdw. $u^2-v^2=0$, während r=0 gdw $v^2-u^2=1$, so daß $r>0$ auf K.

Auf der offenen Teilmenge $V=\left\{(v,u)\in\mathbb{R}^2 \middle| u-v>0 \text{ und } u+v>0\right\}\subset U$ setzen wir $t=\log\frac{u+v}{u-v}$.

a) man zeige, daß auf V gilt: $r>1$, $v=(r-1)^{1/2}e^{r/2}\sinh(t/2)$, $u=(r-1)^{1/2}e^{r/2}\cosh(t/2)$.
b) man zeige, daß auf V gilt: $\eta=-(1-r^{-1})\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t+(1-r^{-1})^{-1}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r$.

Aufgabe 2

Man betrachte $\mathbb{R}^4$ mit den Koordinaten t, x, y, z , darin die durch $r^2=x^2+y^2+z^2>1$ gegebene offene Teilmenge, darin die Koordinatenfunktionen t, r, φ, θ und die pseudoriemannsche Schwarzschild-Metrik $g=-(1-r^{-1})\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t+(1-r^{-1})^{-1}\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r+r^2(\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta+\cos^2\theta\,\mathrm{d}\varphi\otimes\mathrm{d}\varphi)$.

a) Man zeige, daß der Einsteintensor dieser Metrik verschwindet.
b) Mit Hilfe eines ODE-Plotters stelle man Geodäten dar, die von einem Punkt $t_0=0$, $r_0=\rho>1$, $\varphi_0=0$, $\theta_0=0$ ausgehen mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Mit diesen Anfangsbedingungen bleibt man in der (x,y)-Ebene, und man plotte auch nur in dieser.
Man experimentiere mit den Parametern ρ, ϵ , um eine quasi-elliptische Bahn zu erhalten, die den Rand r=1 nie unterschreitet, bei der aber die Ellipsenbahn nicht geschlossen ist, sondern sich rosettenhaft ums Zentrum dreht. Man reproduziere das Phänomen, daß die Periheldrehung schwächer wird, je weiter die Bahn vom Rand r=1 entfernt ist.
c) Man vergleiche die geodätische Differentialgleichung für obige Bahnen mit derjenigen, die sich für eine Bewegung unter dem newtonschen Gravitationsgesetz ergibt.