Vektorbündel

Seien *E*, *M* Mengen, $\pi : E \to M$ eine Abbildung.
Häufing ist man an den Urbildmengen $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ einzelner Punkte $p \in M$ interessiert. Man nennt dann E_p Faser über *p*. Die Sache wird interessant, wenn die die Mengen *E*, *M* und die Fasern weitere Strukturen tragen, insbesondere, wenn *E*, *M* topologische Räume und die Fasern algebraische Objekte sind, z.B. Gruppen oder Vektorräume. In solchen Fällen erwartet man, daß die algebraischen Strukturen der Fasern über benachbarten Punkten miteinander in Beziehung stehen und nennt das gesamte Ensemble $\pi : E \to M$ oder auch nur *E* ein **(Faser-)Bündel (**über *M*).

Ist $U \subset M$, so interessiert man sich für Abbildungen $U \to E$, bei denen jedes $p \in U$ auf ein Element der Faser E_p abgebildet wird und nennt eine solche Abbildung einen **Schnitt** des Bündels (über *U*).

Im folgenden betrachten wir speziell differenzierbare reelle **Vektorbündel**:
Dabei sind *E*, *M* differenzierbare Mannigfaltigkeiten, dim *M*=*n*, dim *E*=*n*+*k*, $\pi : E \to M$ eine differenzierbare Abbildung, die Fasern seien sämtlich *k*-dimensionale (reelle) Vektorräume. Die Beziehung zwischen benachbarten Fasern ist folgende:

Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U sowie einen Diffeomorphismus $\Phi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$, welcher für jedes $q \in U$ den Vektorraum $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ [1] linear isomorph in die Faser E_q abbildet.

Bemerkung: Ist dabei $e_1, \ldots, e_k$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^k$ und $q \in U$, so bilden die Elemente $e_1(q) = \Phi(q, e_1), \ldots e_k(q) = \Phi(q, e_k) \in E_q$ für jedes $q \in U$ eine Basis von E_q. Die e_i lassen sich demnach als glatte Schnitte in *E* über *U* auffassen und bilden sogenannte Basisschnitte.

Die Menge der glatten Schnitte von *E* über einer offenen Menge *U* bezeichnet man mit $\Gamma(U, E)$. Offenbar kann man bei einem Vektorbündel Schnitte über *U* punktweise addieren und mit Skalaren und sogar via $(fX)(p) := f(p)X(p)$ mit glatten Funktionen in *D*(*U*) multiplizieren. Man zeigt mit Hilfe der obigen Vektorbündeldefinition, daß dabei wieder glatte Schnitte herauskommen, so daß $\Gamma(U, E)$ in natürlicher Weise ein ℝ-Vektorraum und sogar ein *D*(*U*) Modul ist, dessen neutrales Element der sogenannte Nullschnitt ist, der jedem Element $p \in U$ das Nullelement 0_p des Vektorraums E_p zuordnet.

Ein Schnitt $X \in \Gamma(U, E)$ besitzt eine Nullstelle in einem Punkt $p \in U$, wenn $X(p) = 0_p$.

Betrachtet man das Bündel $M \times \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 1) so lassen sich seine glatten Schnitte mit glatten Funktionen identifizieren.

Beispiele:

1. Ist *F* ein *k*-dimensionaler ℝ-Vektorraum, so ist die Mannigfaltigkeit $M \times F$ ein Vektorbündel . Dabei ist die Mannigfaltigkeitsstruktur auf *F* durch einen Atlas aus globalen Karten gegeben, wobei jede Karte $F \to \mathbb{R}^k$ durch Wahl einer Basis in *F* und deren Abbildung auf die kanonische Basis des $\mathbb{R}^k$ definiert ist. Es gibt also soviele Karten in *F* wie Basen. Die Kartentransformationen sind dann invertierbare lineare Abbildungen $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, die als solche natürlich glatt sind. Um in *F* zu rechnen, genügt natürlich eine dieser Karten, d.h. eine Basis.

---

1 $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ ist in natürlicher Weise ein Vektorraum: $(q, X) + (q, Y) := (q, X+Y)$, $\lambda(q, X) := (q, \lambda X)$

Die Projektion $\pi: M\times F\to M$ ist dann die übliche Projektion auf die erste Komponente. Die Faser $E_p=\{p\}\times F$ erhält ihre Vektorraumstruktur durch F, vgl. obige Fußnote. Wählt man eine Basis $e_1,\dots,e_k\in F$, so ist $\Phi: M\times\mathbb{R}^k\to M\times F$, $(p,(X^1,\dots,X^k))\to(p,X^i e_i)$ ein Diffeomorphismus wie ihn die Vektorbündeldefinition erfordert, der hier sogar global über ganz $M\times\mathbb{R}^k$ und nicht nur jeweils für offene Teilmengen $U\times\mathbb{R}^k$ gegeben ist.

2. Man betrachte die Zylinderfläche $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2=1\right\}$, welche eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist; $\pi(x,y,z)=(x,y)$ ist die kanonische Projektion von auf den Kreis S^1. Ist $p=(x,y)\in S^1$, so ist die Faser $E_p=\left\{(x,y,z) \;\middle|\; z\in\mathbb{R}\right\}$ die Gerade durch den Punkt (*x*, *y*, 0), welche auf der (*x*, *y*)-Ebene senkrecht steht. Die Vektorraumstruktur auf dieser Gerade ist natürlich u.a. durch $(x,y,z)+(x,y,w)=(x,y,z+w)$ gegeben.

Durch $e(p)=(p,1)$ ist ein globaler Schnitt $e: S^1\to E$ gegeben.

Bemerkung:
Wenn es globale Schnitte $e_1,\dots,e_k: M\to E$ gibt, die in jedem Punkt $p\in M$ eine Basis von E_p bilden, so nennt man das Bündel *E* trivial. Offenbar sind die Bündel in Beispiel 1 und Beispiel 2 trivial.

3. Im $\mathbb{R}^3$ stellt man ein Möbiusband als „Intervallbündel" über S^1 dar.
Als echtes Geradenbündel[2] realisiert man es am einfachsten im $\mathbb{R}^4$. Dazu setze man

$$E=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, u,v,\lambda\in\mathbb{R}:\; u^2+v^2=1,\; (x+iy)=(u+iv)^2,\; (z,w)=\lambda(u,v)\right\}.$$

Der Leser zeige, daß *E* eine glatte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ und mit $\pi: E\to S^1$, gegeben durch $\pi(x,y,z,w)=(x,y)$, ein eindimensionales Vektorbündel über S^1 ist. Der Leser überlege weiterhin, wieso dieses Bündel keinen globalen Schnitt ohne Nullstelle besitzt, so wie es bei den Bündeln in den vorigen Beispielen der Fall war, also nicht trivial sein kann.

4. Das Tangentialbündel *TM* einer Mannigfaltigkeit *M* ist ein Bündel im oben definierten technischen Sinn. Wir haben bereits seine Mannigfaltigkeitsstruktur kennengelernt, ebenso wie die kanonische Projektion $\pi: TM\to M$. Die Faser über *p* ist der Vektorraum der Derivationen in *p*. Die Schnitte in *TM* sind natürlich Vektorfelder. Die Basisschnitte sind die in jeder Karte gegebenen Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Entsprechendes gilt für das Kotangentialbündel. Schnitte hier sind Kovektorfelder bzw. Einsformen. Basisschnitte sind die in jeder Karte gegebenen Kovektorfelder $\mathrm{d}x^i$.

Das Tangentialbündel besitzt natürlich mehr Struktur als irgendein beliebiges Vektorbündel. Seine Schnitte lassen sich ja via Lie-Produkt multiplizieren, besitzen also eine natürliche Lie-Algebra-Struktur, dies gilt für andere Vektorbündel meist nicht.

Ob das Tangentialbündel *TM* trivial ist, hängt von der topologischen Struktur von *M* ab.
Z.B. ist es über der S^1 trivial, über der S^2 jedoch nicht. Ein triviales Bündel besitzt globale Basisschnitte. Ein glattes Vektorfeld über der S^2 besitzt aber immer eine Nullstelle (Satz vom gekämmten Igel, wurde in Analysis 4 bewiesen), d.h. es kann keine globalen Basisschnitte geben.

2 Sind die Fasern eines Vektorbündels eindimensional, so spricht man von einem Geradenbündel.