Fehler in Blatt 8 Aufgabe f)

Üblicherweise definiert man eine quadratische Form auf einem *K*-Vektorraum[1] *V* so:

Eine Abbildung $Q: V \to K$ heißt quadratische Form, wenn es eine symmetrische Bilinearform φ auf *V* gibt, so daß $\forall x \in V: \; Q(x) = \varphi(x, x)$.

Es folgt sofort, daß für eine quadratische Form gilt: $\forall x \in V, \; \lambda \in K: \; Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ (*)
Außerdem zeigt man leicht, daß $\forall x, y \in V: \; \varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big)$ oder $\forall x, y \in V: \; \varphi(x, y) = \frac{1}{4}\big(Q(x+y) - Q(x-y)\big)$. Letzteres bedeutet, daß man die bilineare Abbildung aus der quadratischen Form rekonstruieren kann.

Ich hatte nun fälschlicherweise angenommen, daß man eine quadratische Form bereits durch die Eigenschaft (*) charakterisieren könnte. Daß dies nicht stimmt, fiel mir erst auf, als einige Übungsteilnehmer die Aufgabe so, wie sie gestellt war, nicht lösen konnten.

Also wird die Aufgabe jetzt folgendermaßen modifiziert und zur "freiwilligen Sonderaufgabe" erklärt (die ich aber nicht mehr besonders interessant finde):

Man gebe ein Beispiel für eine Abbildung $Q: V \to K$, welche die Eigenschaft $\forall x \in V, \; \lambda \in K: \; Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ besitzt, für welche es aber keine symmetrische Bilinearform φ auf *V* gibt mit $\forall x, y \in V: \; \varphi(x, y) = \frac{1}{4}\big(Q(x+y) - Q(x-y)\big)$.

1 Wir setzen im Folgenden char $K \neq 2$ voraus.