Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 1

Aufgabe 1

a) Seien A,B Aussagen. Die Aussagenverknüpfung $A \otimes B$ sei durch folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \otimes B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Man versuche, Aussagenverknüpfungen von A und B zu finden, in denen ausschließlich die Operation $\otimes$ benutzt wird, die äquivalent sind zu $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$. Man muß also die gesuchten Verknüpfungen so konstruieren, daß in ihrer der Wahrheitstafel schließlich dieselben Wahrweitswerte stehen wie bei den drei oben genannten.
(Hinweis: Beispielsweise hat $A \otimes A$ dieselbe Wahrheitstafel wie $\neg A$)

b) Finden Sie eine Verknüpfung der Aussagen A,B,C mit Hilfe der Operationen $\neg, \wedge, \vee$, so daß sich folgende Wahrheitstafel ergibt:

A	B	C	?
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Nehmen Sie zur Kenntnis, daß die Einträge in die letzte Spalte zufällig gewählt wurden.
(Hinter diesem Einzelfall steckt die Tatsache, daß beliebige „Wahrheitsfunktionen" mit Hilfe von $\neg, \wedge, \vee$ ausgedrückt werden können. Nach 1a) sogar ausschließlich mit Hilfe von $\otimes$. Die Informatiker nennen $\otimes$ übrigens NAND. (Warum wohl?))

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt Äquivalenzrelation, wenn gilt:

$\forall x \in M: \; xRx$
$\forall x, y \in M: \; xRy \rightarrow yRx$ Symmetrie
$\forall x, y, z \in M: \; (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$ Transitivität.

(Erinnern Sie sich, daß die Schreibweise xRy bedeutet, daß $(x, y) \in R$.)

Zu jedem $x \in M$ definiert man die Menge $\bar{x} := \{ y \in M \mid yRx \}$ und nennt $\bar{x}$ die Äquivalenzklasse von x.

a) Betrachten Sie nun die Menge $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ der ganzen Zahlen und definieren die Relation $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch $R := \{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists c \in \mathbb{Z}: \; 5c = a - b \}$ [1].

Begründen Sie, daß R eine Äquivalenzrelation ist.
Beschreiben Sie anschließend alle Äquivalenzklassen. (Hinweis: es gibt genau 5)

b) Sei $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation.
Zeigen Sie, daß die Aussagen $\bar{x} = \bar{y}$ und xRy äquivalent sind.
Zeigen Sie auch, daß $\neg(xRy)$ äquivalent ist zu $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

c) Sei $M = \{ a, b, c \}$ eine dreielementige Menge. Finden Sie alle Äquivalenzrelationen auf M und schreiben Sie diese Mengen vollständig hin.

Bemerkung: Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen gibt es in zahllosen Beispielen in der gesamten Mathematik, auch in der Linearen Algebra. Also: wichtig!

Wichtung:
Aufgabenteile 1a, 1b, 2a, 2b, 2c: jeweils 20% :
Für jeden dieser Aufgabenteile gibt es einen Punkt; 5 Punkte sind erreichbar.

---

1 Dabei ist $\exists$ Abkürzung für *„es gibt“* . Damit gilt offenbar aRb genau dann, wenn die Differenz a-b ein ganzzahliges Vielfaches von 5 ist.