Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 5

Aufgabe 1

Sei $K=\mathbb{Z}_5$. Betrachten Sie die Matrix $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten in *K*.

a) bringen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus die Matrix *A* auf die Form $\begin{pmatrix} E & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b) Bestimmen Sie damit eine Basis des Kerns und des Bilds der linearen Abbildung $K^5 \to K^4$, die durch $x \to Ax$ gegeben ist.

c,d) Lösen Sie dieselbe Aufgabe für die transponierte Matrix $B=A^t=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Sei *V* ein Vektorraum über dem Körper K , $U \subset V$ ein Teilraum, $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V , wobei die ersten *k* Elemente $v_1, \ldots, v_k,\ k \leqslant n$ eine Basis von *U* bilden.
Man zeige: $\overline{v_{k+1}}, \ldots \overline{v_n}$ ist eine Basis des Quotientenraums *V/U* .

Aufgabe 3

Exakte Sequenzen:
$E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$ seien lineare Abbildungen von *K*-Vektorräumen. Man spricht von einer *exakten Sequenz* (linearer Abbildungen) wenn $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$. Hat man eine längere Sequenz $E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_2 \xrightarrow{\varphi_2} \to \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} E_n$, so nennt man diese exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt ist, d.h. wenn jeweils $\ker\varphi_{i+1} = \operatorname{Im}\varphi_i$. Ist 0 der Nullraum, so gibt es genau eine lineare Abbildung $0 \to F$ und $F \to 0$. Offenbar ist für jeden Vektorraum *F* die Sequenz $0 \to F \xrightarrow{id} F \to 0$ exakt; ist $E \subset F$ ein Teilraum, so ist $0 \to E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} F/E \to 0$ exakt, wobei $i(x)=x$ und $\pi(x)=\overline{x}$ die "kanonische Injektion" bzw. "kanonische Projektion" sind. (Überlegen Sie sich das!)

Man finde eine möglichst einfach beschreibbare exakte Sequenz $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_4 \to 0$, wobei E_1 ein eindimensionaler, E_2 ein dreidimensionaler , E_3 ein fünfdimensionaler und E_4 ein dreidimensionaler Teilraum des K^5 sind und beweise die Exaktheit.