Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 9

Seien U, V Vektorräume über K. Ist $\varphi : U \to V$ linear, so ist die *duale Abbildung* $\varphi^* : V^* \to U^*$ gegeben durch $\forall \mu \in V^* \; u \in U : \; \left(\varphi^*(\mu)\right)(u) := \mu\left(\varphi(u)\right)$.

Sind $u_1 \ldots u_n$, $v_1 \ldots v_n$ Basen von U, V, so wird φ durch die durch $\varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$ gegebene Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ beschrieben.

Man erinnere sich, daß die duale Basis $u^1 \ldots u^n$ von U^* durch die Gleichungen $u^i(u_j) = \delta^i_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ beschrieben wird, entsprechendes gilt für die duale Basis $v^1 \ldots v^m$ von V^* .

Aufgabe 1
Zeigen Sie, daß die duale Abbildung $\varphi^* : V^* \to U^*$ durch die *transponierte Matrix* $A^t = \left(a_{ji}\right)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant m}}$ beschrieben wird.

Aufgabe 2
Sei W ein weiterer K-Vektorraum, und betrachten Sie die Sequenz $U \overset{\varphi}{\to} V \overset{\psi}{\to} W$.

a) Zeigen Sie $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.
b) Zeigen Sie: Ist $U \overset{\varphi}{\to} V \overset{\psi}{\to} W$ exakt, so auch $W^* \overset{\psi^*}{\to} V^* \overset{\varphi^*}{\to} U^*$.
Hinweis: Der Nachweis der Inklusion $\operatorname{Im} \psi^* \subset \ker \varphi^*$ erweist sich als relativ trivial. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion kann man die Tatsache benutzen, daß der Teilraum $W_1 := \operatorname{Im} \psi \subset V$ einen Komplementärraum $W_2 \subset W$ besitzt, d.h. $W_1 \oplus W_2 = W$ [1], d.h. jedes $w \in W$ läßt sich eindeutig schreiben als $w = w_1 + w_2$ mit $w_1 \in \operatorname{Im} \psi, w_2 \in W_2$, wobei $w_1 = \psi(v)$ mit $v \in V$. Dieses Urbild von w_1 ist i.a. nicht eindeutig bestimmt, und dies ist ggf. zu beachten.

In beiden Teilaufgaben wird nicht vorausgesetzt, daß die beteiligten Räume endlichdimensional sind; es sind auch keine Basen zu benutzen.

Aufgabe 3
V sei ein$K$-Vektorraum mit einer abzählbaren Basis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (wie z.B. der Raum der Polynome mit Koeffizienten in K) . Wie auch im endlichdimensionalen Fall sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ Linearformen $e^n \in V^*$ definiert durch $e^n(e_m) = \delta^n_m$. Man zeige, daß es eine Linearform $\varphi \in V^*$ gibt, die sich nicht als endliche Linearkombination der $\left(e^n\right)$ schreiben läßt.
(Dies bedeutet, daß die $e^n \in V^*$ im unendlichdimensionalen Fall keine Basis des Dualraums bilden, der dann also größer sein muß als der von den $\left(e^*_n\right)$ erzeugte Teilraum.)

---

1 Allgemein gilt: Jeder Teilraum eines Vektorraums besitzt einen (nicht eindeutig bestimmten) Komplementärraum.

Aufgabe 5

Eine *assoziative Algebra A* über einem Körper *K* ist ein Vektorraum, der gleichzeitig ein Ring ist. Dabei soll die Ringmultiplikation *K*-bilinear sein, d.h.es soll gelten:

$\forall x, y, z \in A : x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$ und

$\forall \lambda \in K, x, y \in A: \lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y$.

Wir kennen bereits eine solche Algebra, nämlich den Polynomring in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in *K* .

Sei jetzt *A* eine assoziative Algebra, welche den *K*-Vektorraum *V* als Untervektorraum enthält, und es gelte $\forall v \in V : v^2 = vv = 0$.

a) Man zeige, daß $\forall v, w \in V: vw = -wv$

b) Man zeige: Sind $v_1 \ldots v_n \in V$ linear abhängig, so gilt in *A* : $v_1 \cdot \ldots \cdot v_n = 0$.

Hinweis: man nehme oBdA an, daß $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$ und hat dann $0 = v_1 \cdot \ldots \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_1 \cdot \ldots \cdot v_{n-1} \cdot v_i$; man zeige nun, daß jeder Summand Null ist.

c) Sei e_1, e_2, e_3 eine Basis von *V* und seien $v_j = \lambda_{1j} e_1 + \lambda_{2j} e_2 + \lambda_{3j} e_3$, $1 \leqslant j \leqslant 3$ drei Vektoren in *V*, gegeben als Linearkombinationen der Basisvektoren. Man zeige, daß das Produkt $v_1 v_2 v_3 \in A$ sich schreiben läßt als $v_1 v_2 v_3 = \lambda e_1 e_2 e_3$ und berechne den Skalarfaktor $\lambda \in K$.