Lineare Algebra 1, WS05/06
M. Hortmann

Blatt 12

Aufgabe 1

Die Menge der reellen invertierbaren *nxn*-Matrizen bildet eine Gruppe, die man mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – General Linear Group – bezeichnet. Man studiert verschiedene Untergruppen dieser Matrizengruppe, z.B. die $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ – Special Linear Group – welche von den Matrizen mit Determinante 1 gebildet wird, oder die Gruppe der orthogonalen Matrizen $\mathrm{O}(n)$. Bekanntlich sind die orthogonalen Matrizen durch die Gleichung $A^t A = E$ charakterisiert, woraus det(A)=±1 folgt. Die Gruppe SO(n) enthält definitionsgemäß genau die orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 .

a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, für die gilt $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

b) Finden Sie eine Matrix $B \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, die die z-Achse im $\mathbb{R}^3$ auf sich selbst abbildet und innerhalb der x,y -Ebene eine Rotation um 60 Grad bewirkt.

c) Berechnen Sie die Matrix $C = A^t BA \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ und überprüfen Sie, daß $Cx = x$ für $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) Zeigen Sie umgekehrt, daß es zu jeder Matrix $C \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0$ gibt, so daß $Cx = x$. (Formen Sie dazu die Gleichung $Cx = x$ um in $(C - E)(x) = 0$ und zeigen Sie, daß diese Matrix nicht invertierbar sein kann.)

e) Warum gilt die zu d) analoge Aussage nicht für $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$?