Lineare Gleichungssysteme

Matrizen vs. Homomorphismen

Man geht aus von einer linearen Abbildung $\varphi: V \to W$ zwischen (endlichdimensionalen) K-Vektorräumen, gibt ein $b \in W$ vor und fragt nach der Menge der Lösungen der Gleichung $\varphi(x)=b$, also nach $\{x \in V | \varphi(x)=b\}$. Diese Lösungsmenge kann natürlich auch leer sein. Wenn es aber eine Lösung $x_0 \in V$ gibt, dann gilt für jede andere Lösung $y_0 \in V$, daß $\varphi(x_0-y_0)=\varphi(x_0)-\varphi(y_0)=0$, d.h. $x_0-y_0 \in \ker\varphi$. Die Lösungsmenge ist dann also eine Nebenklasse bezüglich des Unterraums $\ker\varphi \subset V$.

Sind Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_n$ von W gegeben, so wird die lineare Abbildung φ durch die Matrix $A=(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ repräsentiert, wobei $\varphi(v_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$. Die Gleichung $\varphi(x)=b$ wird dann zu

$$\sum_{i=1}^{m} b_i w_i = b = \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} w_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) w_i$$

, woraus man für $1 \leqslant i \leqslant m$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ abliest, also $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, also die Matrixgleichung $Ax=b$, wobei diesmal $x \in K^n$ und $b \in K^m$.

Man könnte also gleich nach der Lösungsmenge der Matrixgleichung $Ax=b$ fragen, und vom algorithmischen Standpunkt ist das die leichter zu behandelnde Frage.

Lösung des Gleichungssystems bei Gaußscher Normalform

Wir werden später zeigen, daß man davon ausgehen kann, daß die mxn-Matrix A die *Gaußsche Normalform* $\begin{pmatrix} E_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt, wobei E_k die kxk-Einheitsmatrix und $0 \leqslant k \leqslant \min\{n, m\}$. Die Grenzfälle $k=0, k=n, k=m$ sind durchaus mitbedacht, indem man "leere Matrizen", also solche mit 0 Zeilen oder 0 Spalten akzeptiert. Im Falle $k=0$ ist A die mxn-Nullmatrix, im Falle $k=n \leqslant m$ ist $A=\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$, im Falle $k=m \leqslant n$ ist $A=\begin{pmatrix} E_m & C \end{pmatrix}$

In den Fällen $k \geqslant 1$ und $n-k \geqslant 1$ zerlegen wir $K^n = K^k \times K^{n-k}$ und schreiben $K^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^k \times K^{n-k}$; in den Fällen $k \geqslant 1$ und $m-k \geqslant 1$ zerlegen wir $K^m = K^k \times K^{m-k}$ und schreiben $K^m \ni b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in K^k \times K^{m-k}$.

1. Fall: $k \geqslant 1$ und $n-k \geqslant 1$ und $m-k \geqslant 1$: $A=\begin{pmatrix} E_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Die Gleichung $Ax=b$ erscheint dann in der Form $\begin{pmatrix} E_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und man erhält

$x_1+Cx_2=b_1$, $0=b_2$, wodurch klar ist, daß eine Lösung der Gleichung höchstens dann existiert, wenn $0=b_2$, d.h. die letzten *m-k* Komponenten von *b* müssen 0 sein.
Davon gehen wir im folgenden aus.

Offenbar gilt die Gleichung $\begin{pmatrix} E_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $x=\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung der Gleichung $Ax=b$.

Alle weiteren Lösungen ergeben sich, indem man Lösungen der Gleichung $Ax=0$ zu dieser speziellen Lösung zuaddiert. $Ax=0$ schreibt sich nun als $\begin{pmatrix} E_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und dies ist äquivalent zu $x_1=-Cx_2$. Die Lösungsmenge der Gleichung $Ax=0$ ist also der Unterraum also $\left\{\begin{pmatrix} -Cx_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^k \times K^{n-k} \middle| \; x_2 \in K^{n-k}\right\} \subset K^n$ und die Lösungsmenge von $Ax=b$ für $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^k \times K^{n-k}$ ist die Nebenklasse $\left\{\begin{pmatrix} b_1-Cx_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^k \times K^{n-k} \middle| \; x_2 \in K^{n-k}\right\}$.

Der Unterraum $\left\{\begin{pmatrix} -Cx_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^k \times K^{n-k} \middle| \; x_2 \in K^{n-k}\right\} \subset K^n$ ist gerade der Kern der linearen Abbildung $x \to Ax$. Dieser Unterraum ist (*n-k*) – dimensional. Eine Basis sind offenbar die Vektoren $\begin{pmatrix} -c_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -c_{n-k} \\ e_{n-k} \end{pmatrix} \in K^n$, wobei c_i die Spaltenvektoren der Matrix *C* und die e_i die kanonischen Basisvektoren des K^{n-k} sind.

2. Fall *k*=0. Dabei ist $A=0$: dieser Fall ist trivial.

3. und 4. Fall $k=n \leqslant m$ und $K=m \leqslant n$ können vom Leser in Anlehnung an den ersten Fall behandelt werden.

Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen zur Herstellung der Gaußschen Normalform

Folgende Operationen mit einer *m*x*n*-Matrix *A* nennt man elementare Zeilenumformungen:
1. Multiplikation einer ganzen Zeile mit einem Skalar.
2. Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
3. Vertauschung zweier Zeilen.

Entsprechend definiert man elementare Spaltenumformungen.
In der Vorlesung wurde gezeigt, daß man das Ergebnis einer elementaren Zeilenumformung als Matrizenprodukt *ZA* interpretieren kann, wobei *Z* eine konkret hinschreibbare invertierbare *m*x*m*-Matrix ist. Analog ergibt sich das Ergebnis einer elementaren Spaltenumformung als Matrizenprodukt *AS* , wobei *S* eine konkret hinschreibbare invertierbare *n*x*n*-Matrix ist.

Wir haben auch schon gesehen, daß man jede invertierbare Matrix als Produkt solcher "Elementarmatrizen" schreiben kann und dies ausgenutzt, um die Inverse zu berechnen.

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß man jede Matrix A durch eine Abfolge elementarer Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen auf die Gaußsche Normalform $\tilde{A}=\begin{pmatrix} E_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bringen kann, wobei E_k die kxk-Einheitsmatrix ist. Man hat also $\tilde{A}=M_N\cdots M_1\cdot A\cdot\pi_1\cdots\pi_K$, wobei die Zeilenumformungen bzw. Spaltenvertauschungen wie eben erwähnt durch Matrixmultiplikationen von links bzw. rechts repräsentiert werden.

Die Gleichung $Ax=b$ wird durch Multiplikation mit $M_N\cdots M_1$ zu $\tilde{b}=M_N\cdots M_1 b=M_N\cdots M_1 A\ x=M_N\cdots M_1 A\pi_1\cdots\pi_K\cdot\pi_K\cdots\pi_1\ x=\tilde{A}\ y$, wobei $y=\pi_K\cdots\pi_1 x$.

Wir haben oben gezeigt, wie man alle Lösungen $y\in K^n$ der Gleichung $\tilde{A}y=\tilde{b}$ findet. Offenbar ist $\pi_1\cdots\pi_K y=x$ dann wieder eine Lösung von $Ax=b$, man muß also die Spaltenvertauschungen, die man beim Herstellen der Gaußschen Normalform vorgenommen hat, in umgekehrter Reihenfolge mit dem Vektor y vornehmen.

1. Beispiel

Sei $K=\mathbb{Z}_5$. Wir gehen aus von $Ax=b$ mit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir wenden die Spaltenvertauschungen $\sigma_1=\pi_{2,3}$ und $\sigma_2=\pi_{3,5}$ an, so daß $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entsteht. Diese Matrix hat bereits die gewünschte Blockform; wir benötigen also keine Zeilenumformungen. Wir erhalten $y=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda(-3)+\mu(-2) \\ \lambda(-4) \\ 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+\lambda(-3)+\mu(-2) \\ 3+\lambda(-4) \\ 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ und durch Vertauschung der Zeilen 3,5 und anschließend der Zeilen 2,3 im Vektor y erhalten wir die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung $Ax=b$ $x=\begin{pmatrix} 2+\lambda(-3)+\mu(-2) \\ \mu \\ 3+\lambda(-4) \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$, wofür man auch leicht die Probe macht.

Beispiel 2

Das obige Beispiel läßt sich verkomplizieren, indem wir die obige Matrix A und den Vektor b mit einer zufälligen invertierbaren 4x4-Matrix X multiplizieren. Wählen wir z.B. $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

so erhalten wir $XA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $Xb = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und stellen die Aufgabe, die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu berechnen. Sie wird sich offenbar nicht von der eben berechneten unterscheiden, wie der Leser anschließend nachrechnen sollte.

Wir rechnen mit elementaren Zeilenumformungen in der folgenden Tabelle:

2	4	0	1	4	3	
2	4	4	2	0	1	
2	4	1	0	4	1	
3	1	1	3	2	1	
						multipliziere jede Zeile mit dem Inversen ihres ersten Elements
1	2	0	3	2	4	
1	2	2	1	0	3	
1	2	3	0	2	3	
1	2	2	1	4	2	
						subtrahiere die erste Zeile von der 2.,3.,4. Zeile
1	2	0	3	2	4	
0	0	2	3	3	4	
0	0	3	2	0	4	
0	0	2	3	2	3	
						jetzt ist die erste Spaltenvertauschung fällig: z.B. 2te Spalte mit 4ter Spalte
1	3	0	2	2	4	
0	3	2	0	3	4	
0	2	3	0	0	4	
0	3	2	0	2	3	
						erzwinge in der zweiten Zeile, daß das zweite Element 1 wird

1	3	0	2	2	4	
0	1	4	0	1	3	
0	2	3	0	0	4	
0	3	2	0	2	3	
						räume die zweite Spalte auf
1	0	3	2	4	0	
0	1	4	0	1	3	
0	0	0	0	3	3	
0	0	0	0	4	4	
						vertausche die dritte und fünfte Spalte
1	0	4	2	3	0	
0	1	1	0	4	3	
0	0	3	0	0	3	
0	0	4	0	0	4	
						räume die dritte Spalte auf
1	0	0	2	3	1	
0	1	0	0	4	2	
0	0	1	0	0	1	
0	0	0	0	0	0	
						die gewünschte Blockform ist erreicht, und das System ist lösbar.

Wir erhalten die allgemeine Lösung $y=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda(-2)+\mu(-3)\\\mu(-4)\\0\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda(-2)+\mu(-3)\\2+\mu(-4)\\1\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}$ und durch

Rückgängigmachen der Vertauschungen in umgekehrter Reihenfolge[1]: $x=\begin{pmatrix}1+\lambda(-2)+\mu(-3)\\\lambda\\\mu\\2+\mu(-4)\\1\end{pmatrix}$

Die Probe zeigt, daß damit tatsächlich eine Lösung von $Ax=b$ vorliegt, und die vorausgegangen Überlegungen zeigen, daß wir durch freie Wahl von λ,μ alle Lösungen finden.

1 In diesem speziellen Fall kommt es zufällig auf die Reihenfolge nicht an.