Das Tensorprodukt

Ziel dieses Kapitels ist es, zu zwei K-Vektorräumen V,W einen Produktraum $V\otimes W$ zu konstruieren. Zu je zwei Vektoren $v\in V, w\in W$ soll es ein Produkt $v\otimes w\in V\otimes W$ geben. Sind Basen $v_1,\ldots,v_n\in V$, $w_1,\ldots,w_n\in W$ gegeben, so sollen die $v_i\otimes w_j\in V\otimes W$, $1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m$, eine Basis von $V\otimes W$ bilden. Damit gilt $\dim V\otimes W=\dim V\cdot\dim W$, wenn V,W endlichdimensional.

Vorbemerkungen über bilineare Abbildungen

Seien V,W,Z Vektorräume über dem Körper K und $\varphi: V\times W\to Z$ eine Abbildung. φ heißt *bilinear* wenn für $v,v_1,v_2\in V,\ w,w_1,w_2\in W,\ \lambda\in K$ gilt:

$$\varphi(v,\lambda w)=\varphi(\lambda v,w)=\lambda\varphi(v,w)$$
$$\varphi(v,w_1+w_2)=\varphi(v,w_1)+\varphi(v,w_2)$$
$$\varphi(v_1+v_2,w)=\varphi(v_1,w)+\varphi(v_2,w)$$

Setzt man $\psi_v(w):=\chi_w(v):=\varphi(v,w)$, so bedeuten diese Gleichungen gerade, daß für alle $v\in V$ die Abbildung $\psi_v: W\to Z$ linear ist und für jedes $w\in W$ die Abbildung $\chi_w: V\to Z$ linear ist.

Die einfachste bilineare Abbildung $K\times K\to K$ ist die Körper-Multiplikation. Man zeigt auch unschwer, daß jede bilineare Abbildung $K^n\times K^m\to K^l$ gegeben ist durch ein Matrizenprodukt

$$(x,y)\to x^t A y=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m x_i y_j a_{ij}\quad\text{, wobei}\quad a_{ij}\in K^l\ .$$

Hat man Basen $v_1,\ldots v_n$ von V und $w_1,\ldots,w_m$ von W, so kann man eine bilineare Abbildung $\varphi: V\times W\to Z$ festlegen, indem man für $1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m$ Elemente $a_{ij}\in Z$ vorgibt. Für $v=\sum_{i=1}^n x_i v_i\in V$ und $w=\sum_{j=1}^m y_j w_j\in W$ setzt man dann $\varphi(v,w):=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m x_i y_j a_{ij}\in Z$ und prüft „zu Fuß" nach, daß φ bilinear ist und daß $\varphi(v_i,w_j)=a_{ij}$. Die Abbildung φ ist die einzige bilineare Abbildung $V\times W\to Z$ mit $(v_i,w_j)\to a_{ij}$, was man nachprüft, indem man eine weitere bilineare Abbildung $\psi: V\times W\to Z$ mit $\psi(v_i,w_j)=a_{ij}$ annimmt und nachrechnet, daß $\forall(v,w)\in V\times W:\ \varphi(v,w)=\psi(v,w)$, was gerade bedeutet, daß $\varphi=\psi$.

Bilineare Abbildungen $V\times W\to Z$ kann man addieren nach der Vorschrift $(\varphi+\psi)(v,w):=\varphi(v,w)+\psi(v,w)$ und mit Skalaren multiplizieren nach der Vorschrift $(\lambda\varphi)(v,w):=\lambda(\varphi(v,w))$. Sie bilden mit diesen Operationen selbst einen Vektorraum, den wir mit $\mathcal{B}_K(V\times W,Z)$ bezeichnen. Welches ist wohl seine Dimension, wenn V,W,Z endlichdimensional sind?

Tensorprodukt

Sind *V,W* *K*-Vektorräume, so möchte man, wie einleitend erwähnt, einen „Produktraum" $V\otimes W$ bilden und auch zu Vektoren $v\in V, w\in W$ ein Produkt $v\otimes w\in V\otimes W$.

Dabei soll die Produktbildung $(v,w)\rightarrow v\otimes w$ bilinear sein, es soll also für $v, v_1, v_2\in V$, $w, w_1, w_2\in W$, $\lambda\in K$ gelten:

$$v\otimes(\lambda w)=(\lambda v)\otimes w=\lambda(v\otimes w)$$
$$v\otimes(w_1+w_2)=v\otimes w_1+v\otimes w_2$$
$$(v_1+v_2)\otimes w=v_1\otimes w+v_2\otimes w$$

Außerdem sollen bei gegebenen Basen $v_1,\dots v_n$ von V, $w_1,\dots,w_n$ von *W* die Produkte $(v_i\otimes w_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ eine Basis von $V\otimes W$ bilden.

Nehmen wir vorläufig an, daß man zu endlichdimensionalen Vektorräumen *V,W* immer einen solchen Raum $V\otimes W$ und eine Abbildung $(v,w)\rightarrow v\otimes w$ mit den obigen Eigenschaften konstruieren kann.

Dann läßt sich die folgende *universelle Eigenschaft* des Tensorprodukts zeigen, welche sich als dessen zentrale Eigenschaft herausstellt:

Ist $\varphi: V\times W\rightarrow Z$ bilinear, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\Phi: V\otimes W\rightarrow Z$ mit $\varphi(v,w)=\Phi(v\otimes w)$.

Beweis:
Eine lineare Abbildung läßt sich definieren, indem man auf einer Basis die Werte vorgibt und die Abbildung dann linear fortsetzt. Auf der Basis $v_i\otimes w_j$ wird nun $\Phi(v_i\otimes w_j):=\varphi(v_i,w_j)$ vorgegeben. Ist dann $v=\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $w=\sum_{j=1}^{m} y_j w_j$, so ergibt sich

$$\Phi(v\otimes w)=\Phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{m} y_j w_j\right)\right)=\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j v_i\otimes w_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \Phi(v_i\otimes w_j)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \varphi(v_i,w_j)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{m} y_j w_j\right)=\varphi(v,w)$$

Umgekehrt folgt aus der universellen Eigenschaft die Aussage, daß die $v_i\otimes w_j$ eine Basis von $V\otimes W$ bilden:

Sei dazu $A_{ij}\in K^{n\times m}$ die Matrix mit *n*-Zeilen und *m*-Spalten, die an der Stelle *ij* den Eintrag 1 und sonst den Eintrag Null hat. $K^{n\times m}$ ist in natürlicher Weise ein Vektorraum, in welchem die Matrizen A_{ij} , $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$ eine Basis bilden, wie man leicht nachrechnet.

Wir definieren eine bilineare Abbildung $\varphi: V\times W\rightarrow K^{n\times m}$ durch Vorgabe der Werte $\varphi(v_i,w_j):=A_{ij}$. Die universelle Eigenschaft garantiert uns nun die Existenz einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $\Phi: V\otimes W\rightarrow K^{n\times m}$ mit $\forall(v,w)\in V\times W:\ \Phi(v\otimes w)=\varphi(v,w)$, also inbesondere $\Phi(v_i \otimes w_j) = A_{ij}$. Wenn wir zeigen können, daß Φ bijektiv ist, dann müssen mit den A_{ij} auch die $v_i \otimes w_j$ eine Basis sein.

Wir zeigen zunächst die Surjektivität:

Dazu wählen wir ein beliebiges Element $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ und haben $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, also

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi(v_i, w_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Phi(v_i \otimes w_j) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i \otimes w_j\right)$$, womit $A \in \operatorname{Im} \Phi$.

Nun die Injektivität.

Zunächst soll gezeigt werden, daß die $v_i \otimes w_j$ linear unabhängig sind. Wären sie linear abhängig, so gäbe es eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i \otimes w_j = 0$, für die nicht alle Koeffizienten $a_{ij} = 0$ sind. Dann wäre $\Phi(0) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i \otimes w_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Phi(v_i \otimes w_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = A \neq 0$, was nicht sein kann.

Betrachten wir den Teilraum $E \subset V \otimes W$, der von den $v_i \otimes w_j$ erzeugt wird. Wir haben gerade gezeigt, daß E die Basis $v_i \otimes w_j$ besitzt und daß E durch Φ bijektiv auf $K^{n \times m}$ abgebildet wird. Wir hoffen natürlich, daß $E = V \otimes W$, dann wären wir fertig, aber das muß sich erst noch herausstellen:

Jedenfalls gibt es einen Teilraum $F \subset V \otimes W$, der komplementär zu E ist, also $E \oplus F = V \otimes W$. Wäre nicht schon $E = V \otimes W$ so wäre F nicht der Nullraum. Offenbar könnte nun $\Phi : V \otimes W \to K^{n \times m}$ auf F beliebige Werte annehmen, ohne daß dies sich auf die Forderung $\forall (v, w) \in V \times W : \ \Phi(v \otimes w) = \varphi(v, w)$ auswirkte, denn jedes $v \otimes w$ ist ja eine Linearkombination der $v_i \otimes w_j$ und liegt damit in E . Diese Beliebigkeit widerspricht aber der in der universellen Eigenschaft geforderten Eindeutigkeit von Φ !

Die Konstruktion

Wir bilden den freien Vektorraum $\mathcal{F}(V \times W, K)$ der endlichen Linearkombinationen mit Koeffizienten in K von Elementen von $V \times W$. Unser Tensorprodukt soll ein Quotient $\mathcal{F}(V \times W, K)/U$ dieses Raumes werden. Der Unterraum U, durch den wir “dividieren” wird definiert durch:

$$S_1 := \left\{ (\lambda v, w) - \lambda (v, w) \,\middle|\, \lambda \in K, v \in V, w \in W \right\}$$
$$S_2 := \left\{ (v, \lambda w) - \lambda (v, w) \,\middle|\, \lambda \in K, v \in V, w \in W \right\}$$
$$S_3 := \left\{ (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \,\middle|\, v_1, v_2 \in V, w \in W \right\}$$
$$S_4 := \left\{ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \,\middle|\, v \in V, w_1, w_2 \in W \right\}$$

$S := S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Offenbar ist $S \subset \mathcal{F}(V \times W, K)$. Wir setzen $U := \langle S \rangle$,
$V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W, K)/U$ und für $(v, w) \in V \times W \subset \mathcal{F}(V \times W, K)$ $\quad v \otimes w := \overline{(v, w)}$

Es ist zu zeigen, daß die Abbildung $V \times W \to V \otimes W$ bilinear ist und daß sie die universelle Eigenschaft besitzt.

Zur Bilinearität:
zz: $v \otimes (\lambda w) = \lambda (v \otimes w)$.
Dies bedeutet: $\overline{(v, \lambda w)} = \lambda \overline{(v, w)}$.
Die Rechenregeln mit Nebenklassen ergeben: $\lambda \overline{(v, w)} = \overline{\lambda (v, w)}$. Zu zeigen ist also:
$\overline{(v, \lambda w)} = \overline{\lambda (v, w)}$.
Dies ist äquivalent zu $(v, \lambda w) - \lambda (v, w) \in U$.
Dies gilt aber wegen $(v, \lambda w) - \lambda (v, w) \in S_1 \subset S \subset <S> = U$.

Die übrigen für die Bilinearität nachzuweisenden Gleichungen ergeben sich analog.

Nachweis der universellen Eigenschaft:

Es sei eine bilineare Abbildung $\varphi : V \times W \to Z$ gegeben. Es ist $V \times W$ eine Basis des freien Vektorraums $\mathcal{F}(V \times W, K)$. Wir können also eine lineare Abbildung $\tilde{\Phi} : \mathcal{F}(V \times W, K) \to Z$ eindeutig durch Vorgabe der Werte $\varphi(v, w)$ auf dieser Basis definieren. Damit die Abbildung $\tilde{\Phi}$ auf den Quotienten zu einer Abbildung $\Phi : \mathcal{F}(V \times W, K)/U \to Z$ "herruntergedrückt" werden kann, daß also für $x \in \mathcal{F}(V \times W, K)$ die Definition $\Phi(\overline{x}) := \tilde{\Phi}(x)$ und damit insbesondere $\Phi(v \otimes w) = \Phi(\overline{(v, w)}) := \tilde{\Phi}(v, w) = \varphi(v, w)$ Sinn macht, muß nur gezeigt werden, daß $\tilde{\Phi}$ auf dem Unterraum *U* verschwindet, d.h. $U \subset \ker \tilde{\Phi}$.

Eine lineare Abbildung verschwindet auf einem Unterraum, wenn sie auf einem Erzeugendensystem dieses Unterraums verschwindet. Wir müssen also zeigen, daß $\tilde{\Phi}$ auf $S_1, \ldots, S_4$ Null ist.

Nehmen wir beispielsweise ein Element $x = (v, \lambda w) - \lambda (v, w) \in S_2$ und rechnen:
$\tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(v, \lambda w) - \lambda \tilde{\Phi}(v, w) = \varphi(v, \lambda w) - \lambda \varphi(v, w) = 0$ aufgrund der Bilinearität von φ .

Analog rechnen wir mit Elementen der übrigen S_i und haben damit $U \subset \ker \tilde{\Phi}$ gezeigt.