Definitionen und Ergänzungen zum Begriff der Abbildung

Definition *(Relation)*
Eine ***Relation*** *R* ist eine Teilmenge eines cartesischen Produkts von Mengen: $R \subset A \times B$.

Definition *(Funktion)*
Eine ***Funktion*** *F* ist eine spezielle Relation $F \subset A \times B$ mit der zusätzlichen Eigenschaft
$$(x, y_1), (x, y_2) \in F \;\; \rightarrow y_1 = y_2 .$$
Die zweite Komponente eines Wertepaares einer Funktion ist also durch die erste eindeutig bestimmt.

Definition *(Abbildung)*
Eine ***Abbildung*** *f* ist ein Tripel *f=(A,B,F)*, wobei *A,B* Mengen sind und $F \subset A \times B$ eine Funktion mit der zusätzlichen Eigenschaft: $D(F) := \{x \in A | \exists y \in B : (x, y) \in F\} = A$.

Es kommt also jedes Element der Menge A als erste Komponente eines Wertepaars in *F* vor. Man nennt die Menge *A* den *Definitionsbereich* von *f*, die Menge *B* den *Wertebereich* oder auch *Bildbereich* von *f.*

Ist $x \in A$, so bezeichnet man mit *f(x)* das eindeutig bestimmte Element $y \in B$, für das gilt: $(x, y) \in F$. *f(x)* nennt man auch das *Bild* von *x* und *x* das *Urbild* von *f(x)* . Es gilt $F = \{(x, f(x) | x \in A\}$.

Statt *f=(A,B,F)* schreibt man meistens $f : A \rightarrow B$. Diese Schreibweise unterschlägt die zugehörige Funktion *F*, was aber eigentlich nicht zu Missverständnissen führen kann.

Definition *(injektiv, surjektiv, bijektiv)*
Sei nun $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

f heißt ***injektiv***, wenn $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
Sind also bei einer injektiven Abbildung zwei Bilder gleich, dann auch die zugehörigen Urbilder. Im Umkehrschluß bedeutet dies: Sind die Urbilder verschieden, so auch die Bilder.

f heißt ***surjektiv***, wenn $\forall y \in B \; \exists x \in A : y = f(x)$.
Bei einer surjektiven Abbildung kommt also jedes Element des Wertebereichs als Bild eines Elementes des Definitionsbereichs vor.

f heißt ***bijektiv***, wenn *f* sowohl injektiv wie surjektiv ist.

Definition ***(Bildmenge, Urbildmenge)***
Sei $f: A \to B$ eine Abbildung.
Ist $U \subset A$, so setzt man $f(U) := \{ f(x) | x \in U \}$ und nennt *f(U)* die *Bildmenge* von *U*. Die Bildmenge von *U* ist eine Teilmenge des Wertebereichs. Offenbar ist f genau dann surjektiv, wenn $f(A) = B$.

Ist $V \subset B$, so setzt man $f^{-1}(V) := \{ x \in A | f(x) \in V \}$ und nennt $f^{-1}(V)$ die Urbildmenge von *V*.

Definition ***(Verknüpfung von Abbildungen)***
Seien Abbildungen $f: A \to B$ und $g: B \to C$ gegeben. Durch die Abbildungsvorschrift $\begin{array}{ll} A \to & C \\ x & \to g(f(x)) \end{array}$ wird eine neue Abbildung definiert, die man mit $g \circ f$ bezeichnet. Man setzt also $(g \circ f)(x) := g(f(x))$

Definition ***(identische Abbildung)***
Die Abbildung $\begin{array}{lll} A & \to & A \\ x & \to & x \end{array}$ nennt man die identische Abbildung auf A, „id_A“ und schreibt auch $id: A \to A$.

Definition ***(Umkehrabbildung)***
Sei $f: A \to B$ bijektiv. Zu jedem $y \in B$ existiert dann ein eindeutig bestimmtes $x \in A$ mit $f(x) = y$. Umgekehrt wird durch die Zuordnung $y \to x$ eine (ebenfalls bijektive) Abbildung $B \to A$ definiert, die man *Umkehrabbildung von f* nennt und mit f^{-1} bezeichnet.
Offenbar gilt $f^{-1} \circ f = id_A$, $f \circ f^{-1} = id_B$.

Bemerkung: Die Definition der Urbildmenge $f^{-1}(V)$ setzte nicht voraus, dass *f* bijektiv ist und dass die Umkehrabbildung f^{-1} überhaupt existiert. Ist dagegen f bijektiv, so könnte man mit der Schreibweise $f^{-1}(V)$ ja auch die Bildmenge von *V* unter der Umkehrabbildung meinen. Glücklicherweise kommt das aber auf dasselbe heraus.