Mathematische Grundlagen der Informatik I, WS01/02
Aufgabenblatt 10

Permutationen

Aufgabe 1

a) Was ist die Inverse der Permutation $(3,5,2,6,1,4) \in \mathbb{S}_6$?
b) Berechne die 12 geraden Permutationen in $\mathbb{S}_4$ (also diejenigen, die aus einer geraden Anzahl von Transpositionen hervorgehen).

Aufgabe 2
Zeige durch Induktion, dass n! die Anzahl der Elemente von $\mathbb{S}_n$ ist.

Untergruppen

Aufgabe 3

Die Menge $G = \{1,2,3,4,7,8,9,11,12,13,16,17,18,19,22,23,24,26,27,29,31,32,33,34\}$ besitzt 24 Elemente. Es gilt $G = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ ist nicht teilbar durch 5 und durch 7}\}$.
Auf *G* wird eine Gruppenoperation definiert, indem man die Elemente zunächst als natürliche Zahlen multipliziert und dann den Rest nimmt, der bei Division durch 35 bleibt, also z.B. $9 \cdot 11 = 29$.

a) Finden Sie zu jedem Element von *G* das Inverse!

b) Wenn man ein Element $a \in G$ nimmt und dann alle Produkte $a, a \cdot a, a \cdot a \cdot a$, etc. bildet, bis 1 herauskommt, bilden die so gewonnenen Elemente eine Untergruppe von *G*.

Finden Sie durch Wahl geeigneter Ausgangselemente Untergruppen mit 1,2,3,4,6,8 und 12 Elementen.

Aufgabe 4

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe.

a) Zeigen Sie: durch $a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a \cdot b^{-1} \in H$ wird auf *G* eine Äquivalenzrelation erklärt.

b) Im Beispiel von Aufgabe 3 wählen Sie die Untergruppe $H := \{1,4,9,11,16,29\}$. Es gibt in diesem Fall 4 Äquivalenzklassen: Bestimmen Sie diese!

Hinweis: *H* selbst ist ebenfalls eine Äquivalenzklasse. Jede Äquivalenzklasse hat 6 Elemente; die verschiedenen Äquivalenzklassen haben jeweils leeren Durchschnitt, und jedes Element von *G* kommt in einer Klasse vor.