Mathematische Grundlagen der Informatik I, WS01/02
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1

Man stelle die Permutation $(3,5,2,6,7,1,4) \in \mathbb{S}_7$ als Produkt von Transpositionen dar.

Aufgabe 2

Sei $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$.
Durch $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$ wird auf G eine Gruppenoperation mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ als neutralem Element definiert.

a) Man zeige, dass das Resultat der oben definierten Verknüpfung tatsächlich ein Element von G ist.

b) Man zeige durch Angabe eines Beispiels, dass die Verknüpfung nicht kommutativ ist.

c) Man finde das inverse Element von $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

d) Man rechne die Gültigkeit des Assoziativgesetzes in G nach!

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe und $a \in G$. Definiere $\varphi : G \to G$ durch $\varphi(x) := a^{-1} x\, a$. Zeige
a) φ ist bijektiv
b) φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 4*

Sei $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Gruppe mit n Elementen, die Gruppentafel sei gegeben durch $a_i \cdot a_j = a_{\sigma(i,j)}$ und die Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{S}_n$ in die Permutationsgruppe der Ordnung n sei definiert durch $\left(\varphi(a_i)\right)(j) := \sigma(i,j)$.

Man zeige: Die Abbildung φ ist injektiv, und sie ist ein Homomorphismus.
(Dies bedeutet: jede endliche Gruppe ist Untergruppe einer Permutationsgruppe).