Mathematische Grundlagen der Informatik I, WS01/02
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1.

a) Die Menge M werde zerlegt in disjunkte Teilmengen $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, $M_i \cap M_j = \varnothing$ für $1 \le i < j \le 3$. Man setze $x \sim y$ gdw. $\exists i, 1 \le i \le 3 : x \in M_i \wedge y \in M_i$ und zeige, dass ~ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Man finde alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $M := \{1,2,3,4\}$.

Gegeben sei für die folgenden Aufgaben eine Abbildung $f : A \to B$.

Aufgabe 2.

a) Sind $U, V \subset A$, so zeige man $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$ und gebe ein Beispiel dafür an, dass die umgekehrte Inklusion nicht ohne weiteres zutrifft.

b) Welche Bedingung muß man an f stellen, damit $f(U) \cap f(V) \subset f(U \cap V)$? (Beweis!)

Aufgabe 3.
Sei $g : B \to C$ eine weitere Abbildung und die Abbildung $h : A \to C$, welche durch $h(x) := g(f(x))$ definiert wird, erweise sich als bijektiv.

Man folgere, dass dann f injektiv und g surjektiv ist.

Aufgabe 4.

Sei $M := \{n \in \mathbb{N} \mid n+1 = 1+n\}$. Man zeige unter Benutzung der in der Vorlesung gegebenen Definition der Addition, dass
a) $1 \in M$ sowie
b) $n \in M \to S(n) \in M$,
so dass nun lt. Induktionsaxiom folgt $M = \mathbb{N}$ und somit $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 = 1+n$.

Aufgabe 5*.

Gegeben sei eine Abbildung $f : A \to B$. Man betrachte die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{P}(B) &\to \mathfrak{P}(A) \\ V &\to f^{-1}(V) \end{aligned}$$

und zeige:

a) f ist genau dann injektiv, wenn Φ surjektiv ist.
b)** f ist genau dann surjektiv, wenn Φ injektiv ist.