Mathematische Grundlagen der Informatik I, WS01/02
Aufgabenblatt 5

Man zeige durch Induktion:

Aufgabe 1.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aufgabe 2.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Hinweis Aufg. 2. : Im Laufe der Rechnung benutze man die in der Vorlesung bewiesene Formel $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, jedoch nicht gleich zu Anfang!

Aufgabe 3.

Sei B^* die Menge der endlichen aus den Zeichen 0,1 gebildeten Zeichenfolgen (ohne die Zeichenfolge „0“), also $B^* = \{1, 10, 11, 100, 101, \ ...\ \}$.
Definiere die Abbildung $S: B^* \to B^*$ induktiv durch $S(1):=10,\ S(w0) := w1,\ S(w1) := S(w)0$.

Berechne unter Anwendung aller notwendiger Rekursionsschritte S(101101011).

Aufgabe 4.
Man definiert induktiv $0! := 1,\ (n+1)! := (n+1)\cdot n!$
(Damit ist z.B. 6! = 720.)

Man setze für $n,k \in \mathbb{N}_0, k \le n$ $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ und zeige durch direkte Rechnung, dass
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Aufgabe 5*.
Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere man $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} := 1$, und weiter rekursiv $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$.

Damit ist $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ für alle $n,k \in \mathbb{N}_0, k \le n$ erklärt.

a) Man schreibe unter Nutzung dieser Rekursion alle $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ mit $n,k \in \mathbb{N}_0, k \le n \le 6$ hin.

b) Man beweise induktiv, dass für $n,k \in \mathbb{N}_0, k \le n$ gilt: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$