Mathematische Grundlagen der Informatik I, WS01/02
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Für $r \in \mathbb{Q}$ setze man $r^1 := r,\ r^{n+1} := r \cdot r^n$.

Zeige durch geeignete Induktionsbeweise, dass gilt

a) $\forall n \in \mathbb{N} \forall r, s \in \mathbb{Q}: \ (r \cdot s)^n = r^n \cdot s^n$
b) $\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{Q}: \ r^n \cdot r^m = r^{n+m}$ (Induktion nur über n)

Aufgabe 2

c) $\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{Q}: \ (r^m)^n = r^{mn}$ (Induktion nur über n)
d) Sei $r \in \mathbb{Q},\ r \neq 1$. Man zeige durch Induktion $\sum_{i=1}^{n} r^i := r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

Aufgabe 3

a) Sei $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'},\ \frac{k}{l} = \frac{k'}{l'}$. Zeige, dass die Definition der Addition unabhängig von der Darstellung der beteiligten Brüche ist, dass also gilt: $\frac{ml + kn}{nl} = \frac{m'l' + k'n'}{n'l'}$.

b) Sei $r \in \mathbb{Q},\ 1 \leq r$. Man zeige mittels Bruchrechnung, dass dann $r^{-1} \leq 1$.

Aufgabe 4

a) Zeige die Gültigkeit des Distributivgesetzes für rationale Zahlen (mittels Bruchrechnung).

b) Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ führe man folgende Operation ein: $(m, n) \otimes (k, l) := (mk - nl, ml + nk)$. Man zeige für diese Operation die Gültigkeit des Assoziativgesetzes.

(Rechengesetze für ganze Zahlen dürfen in beiden Fällen ohne weiteren Beweis verwandt werden.)

Aufgabe 5*

Man zeige, dass es keine rationale Zahl x gibt mit $x^3 = 5$.