Mathematische Grundlagen der Informatik I, WS01/02
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 (Rechnen mit Ungleichungen)

Für die Ordnungsrelation $\leq$ auf den reellen Zahlen gelten die folgenden Verträglichkeitsbedingungen mit Addition und Multiplikation:

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}: \; a \leq b \;\rightarrow\; (a+c) \leq (b+c)$
$\forall a,b,c \in \mathbb{R}: \; (a \leq b \wedge c \geq 0) \rightarrow (ac \leq bc)$

Zeigen Sie

a) $0 < x < y \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}: \; x^2 \geq 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}: \; x \geq -1 \;\rightarrow\; \left(\forall n \in \mathbb{N}: \; (1+x)^n \geq 1+nx\right)$ (Bernoullische Ungleichung, Induktion)

d)* $\forall q \in \mathbb{R}: 0 \leq q < 1 \;\rightarrow\;$ Die Folge $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt den Grenzwert 0.

Neben den oben genannten Ordungsaxiomen für die reellen Zahlen gibt es noch das sog. „Archimedische Axiom“:

$\forall a \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N}: n \geq a$

d.h. zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl. Es ist interessant, dass sich dies nicht aus den übrigen Axiomen für die reellen Zahlen herleiten lässt.

Man muß das Archimedische Axiom benutzen, um zu zeigen:

e)* Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt den Grenzwert 0,d.h. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Für den Absolutbetrag in $\mathbb{R}$ ($|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$) gilt die Dreiecksungleichung:

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; |x+y| \leq |x| + |y|$.

f) Man zeige die verwandte Ungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$.

Aufgabe 2 (über Metriken)

Man bezeichnet mit $\mathbb{R}_+$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen, also $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Eine Metrik auf einer Menge *M* ist eine Abbildung $d: M \times M \to \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften

$\forall x, y \in M: \; d(x,y) = 0 \leftrightarrow (x = y)$
$\forall x, y \in M: \; d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)
$\forall x, y, z \in M: \; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Auf den reellen Zahlen ist $d(x,y) := |x - y|$ eine Metrik, nämlich der übliche „euklidische“ Abstand zwischen zwei Zahlen.

a) Für eine beliebige Menge *M* setze man $d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
Man zeige, dass damit eine Metrik definiert ist.

b) Sei auf einer Menge *M* eine Metrik *d* gegeben. Man zeige, dass durch $d'(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ ebenfalls eine Metrik definiert wird.

6 „reguläre“ Aufgabenteile, 2 „*-Aufgaben“.