Mathematische Grundlagen der Informatik I, WS01/02
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1
Sei *(M,d)* ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, und es sei $a \in M$. Durch $y_n := d(x_n, a)$ wird eine Folge reeller Zahlen definiert. Man zeige die Äquivalenz der Aussagen

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt den Grenzwert *a* (Hier bewegt man sich in M!)

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt den Grenzwert 0 (Hier bewegt man sich in $\mathbb{R}$!)

Aufgabe 2
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0,1\}$. Man setze $x_1 := \frac{a_1}{2}$ und $x_{n+1} := x_n + \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$. Damit ist x_n offenbar der Dualbruch $0, a_1 a_2 a_3 a_4, \ldots, a_n$. Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, die deshalb einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt. Man zeige, dass $0 \le a \le 1$ und gebe eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 1 ist. (Wir werden später feststellen, dass jede reelle Zahl eine i.w. eindeutige solche Darstellung besitzt.)

(Hinweis: Man muß $|x_n - x_m|$ abschätzen, wobei oBdA $n \ge m$. Man benötigt, dass $x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$, und benutzt die bekannte Summenformel $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, sowie die von Blatt 7 bekannte Tatsache, dass für 0<*q*<1 die Folge $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert 0 besitzt.)

Aufgabe 2 (Ungleichungen für die euklidische Metrik)
a) Seien $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Man definiert das *Skalarprodukt* $< x, y >:= x_1 y_1 + x_2 y_2$ und die Norm $\|x\| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}$ Man zeige die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*:

$$|< x, y >| \le \|x\| \, \|y\|$$

(Hinweis: für reelle Zahlen $0 \le a \le b$ gilt: $a \le b \Leftrightarrow a^2 \le b^2$. Also ist obige Ungleichung äquivalent zu $|< x, y >|^2 \le \|x\|^2 \, \|y\|^2$; in dieser Form ist man die lästigen Wurzeln los. Man benutze die obigen Definitionsgleichungen und rechne los. An einer entscheidenden Stelle der Rechnung ist zu benutzen, dass Quadrate reeller Zahlen nicht-negativ sind.)

b) Seien wieder $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ist die euklidische Metrik gegeben durch

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Man beweise die Dreiecksungleichung für diese Metrik.
(Wie in a) zeige man, daß $d^2(x,z) \le \left(d(x,y) + d(y,z)\right)^2$; damit wird man die Wurzeln zum größten Teil los. Man rechnet alle auftretenden Ausdrücke aus, fasse zusammen und kommt dann an einen Punkt, an dem die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benötigt wird.)