Aufgabe 1

(M, d) metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, $a \in M$.
$(y_n) := d(x_n, a)$ definiert eine Folge reeller Zahlen.

Zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(y_n) = 0$$

Es gilt für die Folge in M:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon$$

Weiterhin gilt laut Definition für die Folge (y_n):

$$\lim_{n\to\infty}(y_n) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(y_n, 0) < \varepsilon$$

Da (y_n) eine Folge *reeller Zahlen* ist, ist die Metrik d der gewöhnliche Betrag: $d(y_n, 0) = |y_n - 0| = |y_n|$. y_n war nun aber gerade über die Metrik d in M definiert, daher folgt:

$$y_n = d(x_n, a) \quad \Rightarrow \quad d(y_n, 0) = |d(x_n, a)| = d(x_n, a)$$

Hieraus ergibt sich sofort die zu zeigende Äquivalenz.

Aufgabe 2

Seien $(a_n), (x_n)$ die auf dem Aufgabenzettel definierten Folgen.

Zu zeigen: (x_n) ist Cauchy-Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Weiterhin zeige man, dass $0 \geq a \geq 1$ gilt.

1. Schritt: (x_n) ist Cauchy-Folge

Per Definition muss für die Folge (x_n) folgendes gelten, damit sie eine Cauchy-Folge darstellt:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die "weit draußen" liegenden Folgenglieder (großes n) dicht beieinander liegen. Man kann zu jedem noch so kleinen Wert $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 für die Folgenglieder finden, so dass alle nachfolgenden Folgenglieder dichter beieinander liegen als der durch das Epsilon gegebene Abstand vorgibt.

Sei nun also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen nun $|x_n - x_m|$ abschätzen und ein entsprechendes n_0 finden. Dazu sei $n > m$ (der Fall $m = n$ ist trivial, da dann offensichtlich $|x_n - x_m| = 0$, somit ist für jedes n_0 die Bedingung erfüllt).

Zusätzlich wissen wir, dass $x_n >= 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, da jedes Folgenglied aus einer Summe nicht-negativer Summanden besteht. Weiterhin gilt daher aufgrund der gegebenen induktiven Definition die folgende Monotonie: $x_n \geq x_m, \;\; n \geq m$. Damit können wir umformen:

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
|x_n - x_m| = x_n - x_m &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{2^i} \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} \frac{a_i}{2^i} \quad \leq \quad \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^i} \quad \text{wegen } a \in \{0,1\} \\
\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^i} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^m - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0
\end{aligned}$$

Wir haben nun also $0 \leq |x_n - x_m| \leq \left|\left(\frac{1}{2}\right)^m - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right|$. Nun gilt bekanntermaßen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

was nichts anderes bedeutet als

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall m, n \geq n_0 : \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right| < \varepsilon$$

Da wir somit wissen, dass eine Folge, deren Folgenglieder immer größer oder gleich den Gliedern von (x_n) sind, gegen Null konvergiert, muss (x_n) auch gegen Null konvergieren. #

2. Schritt: $0 \leq a \leq 1$

Dass $0 \leq a$ gilt, haben wir bereits in Schritt 1 dargelegt, es bleibt also zu zeigen, dass $a \leq 1$ gilt. Dies sieht man wie folgt:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

Hierbei wird auch sofort ersichtlich, welche Folge (a_n) zu wählen ist, damit der Grenzwert von (x_n) gleich 1 ist, nämlich die Folge $a_i = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3 (Euklidische Metrik)

(a)

Seien $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ Punkte in $\mathbb{R}^2$. Man definiert das *Skalarprodukt* $< x, y >:= x_1y_1 + x_2y_2$ und die *Norm* $||x|| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$.

Zu zeigen: *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:* $| < x, y > | \leq ||x|| \; ||y||$

Es gilt in $\mathbb{R}$: $0 \leq a \leq b \Rightarrow \quad (a \leq b \;\Leftrightarrow\; a^2 \leq b^2)$

Daher werden wir durch Äquivalenzumformungen zeigen, dass gilt:

$$\begin{array}{rcl}
| < x, y > |^2 & \leq & ||x||^2 \cdot ||y||^2 \\
\Leftrightarrow \quad (x_1y_1 + x_2y_2)^2 & \leq & ({x_1}^2 + {x_2}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2) \\
\Leftrightarrow \quad {x_1}^2{y_1}^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + {x_2}^2{y_2}^2 & \leq & {x_1}^2{y_1}^2 + {x_1}^2{y_2}^2 + {x_2}^2{y_1}^2 + {x_2}^2{y_2}^2 \\
\Leftrightarrow \quad 2x_1x_2y_1y_2 & \leq & {x_1}^2{y_2}^2 + {x_2}^2{y_1}^2 \\
\Leftrightarrow \quad 0 & \leq & (x_1y_2)^2 - 2(x_1y_2x_2y_1) + (x_2y_1)^2 \\
\Leftrightarrow \quad 0 & \leq & (x_1y_2 - x_2y_1)^2
\end{array}$$

Wegen $a^2 \geq 0 \; \forall a \in \mathbb{R}$ folgt ist damit unsere Behauptung bewiesen:

$$|x_1y_1 + x_2y_2| \quad \leq \quad \sqrt{(x_1 + x_2)^2(y_1 + y_2)^2}$$

#

(b)

Seien wieder $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ Punkte in $\mathbb{R}^2$. Man beweise die Dreiecksungleichung für die Euklidische Metrik:

$$d(x, y) := ||x - y|| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Zu zeigen:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \;\Leftrightarrow\; d^2(x, z) \leq (d(x, y) + d(y, z))^2$$

Wir formen zunächst um:

$$(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 \leq \left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 \leq\; & (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + \\
& \underbrace{2\sqrt{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)((y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2)}}_{D}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{x_1}^2 - 2x_1z_1 + {z_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_2z_2 + {z_2}^2 \leq\; & {x_1}^2 - 2x_1y_1 + {y_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_2y_2 + {y_2}^2 \\
& + {y_1}^2 - 2y_1z_1 + {z_1}^2 + {y_2}^2 - 2y_2z_2 + {z_2}^2 + D
\end{aligned}$$

$$2(-{y_1}^2 - {y_2}^2 + x_1y_1 + x_2y_2 + y_1z_1 + y_2z_2 - x_1z_1 - x_2z_2) \quad \leq \quad D$$

Wir wissen, dass wir die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung anwenden wollen, daher formen wir um. Man rechnet leicht nach, dass obiger Ausdruck äquivalent ist zu folgendem Ausdruck:

$$2((x_1 - y_1)(y_1 - z_1) + (x_2 - y_2)(y_2 - z_2)) \quad \leq \quad D$$

Mit $a_1 = (x_1 - y_1), a_2 = (x_2 - y_2), b_1 = (y_1 - z_1), b_2 = (y_2 - z_2)$ bedeutet der Ausdruck folgendes, woraufhin sofort ersichtlich wird, dass hier die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung vorliegt, sogar in "abgeschwächter Form", da die Betragstriche fehlen und die Ungleichung somit erst recht gelten muss.

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \leq \quad \sqrt{(a_1 + a_2)^2 (b_1 + b_2)^2}$$

#