MGInf1 Mathematische Grundlagen der Informatik 1 WiSe 2001/02

Aufgabenblatt 9

Lösungen

1

Nach Definition des Grenzwerts einer Folge gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ |x_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

1.a

$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\quad x_n := n$

Annahme:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ |x_n - a| < \varepsilon$$

Sei:

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

Wenn x_n den Grenzwert a besitzt, dann muß ein n_0 existieren ab dem für alle n mit $n \geq n_0$, $|x_n - a| < \frac{1}{4}$ gilt, in diesem Fall also $|n - a| < \frac{1}{4}$.

Laut Definition des Grenzwerts müßte nun auch $|x_{n+1} - a| < \frac{1}{4}$ sein, also $|n + 1 - a| < \frac{1}{4}$

Da nicht sowohl $|n - a| < \frac{1}{4}$ als auch $|n+1-a| < \frac{1}{4}$ gelten kann, haben wir es hier offensichtlich mit einem Widerspruch zu tun.

$$\Rightarrow \neg\exists a \in \mathbf{R} : \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

1.b

Analog zu 1.a:

$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\quad x_n := (-1)^n$

Für die einzelnen Folgenglieder gilt:

$$x_n = \begin{cases} -1 \text{ wenn } n \text{ ungerade} \\ 1 \text{ wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Insbesondere gilt außerdem:

$$x_n = -1 \Rightarrow x_{n+1} = 1 \quad \text{und}$$
$$x_n = 1 \quad \Rightarrow x_{n+1} = -1$$

Annahme:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ |x_n - a| < \varepsilon$$

Sei wiederum:

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

Wenn x_n den Grenzwert a besitzt, dann muß ein n_0 existieren ab dem für alle n mit $n \geq n_0$, $|x_n - a| < \frac{1}{4}$ gilt.

Laut Definition des Grenzwerts müßte nun auch $|x_{n+1} - a| < \frac{1}{4}$ sein.

Nach obiger Erklärung müßte also gelten:

$$|(-1) - a| < \frac{1}{4} \quad \wedge \quad |1 - a| < \frac{1}{4}$$

Wiederum kann nicht beides gelten.

$$\Rightarrow \neg\exists a \in \mathbf{R} : \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

2

$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\quad x_n := \dfrac{3n^3 + 4n^2 + 1}{n^3 + 2n + 5}$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3n^3 + 4n^2 + 1}{n^3 + 2n + 5} \quad \Big|\cdot \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} \\ x_n &= \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}} \end{aligned}$$

Nun kann man nach den Grenzwertsätzen umformen:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}(3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3})}{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3})} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{3+0+0}{1+0+0} = 3 \end{aligned}$$

3

Festlegen der Elemente von $\mathbf{S}_3$:

$e_1 = (1,2,3)$
$e_2 = (1,3,2)$
$e_3 = (2,1,3)$
$e_4 = (2,3,1)$
$e_5 = (3,1,2)$
$e_6 = (3,2,1)$

Verknüpfungen mit allen Elementen:

$(1,2,3) \circ (1,2,3) = (1,2,3) = e_1$
$(1,2,3) \circ (1,3,2) = (1,3,2) = e_2$
$(1,2,3) \circ (2,1,3) = (2,1,3) = e_3$
$(1,2,3) \circ (2,3,1) = (2,3,1) = e_4$
$(1,2,3) \circ (3,1,2) = (3,1,2) = e_5$
$(1,2,3) \circ (3,2,1) = (3,2,1) = e_6$

$(1,3,2) \circ (1,2,3) = (1,3,2) = e_2$
$(1,3,2) \circ (1,3,2) = (1,2,3) = e_1$
$(1,3,2) \circ (2,1,3) = (3,1,2) = e_5$
$(1,3,2) \circ (2,3,1) = (3,2,1) = e_6$
$(1,3,2) \circ (3,1,2) = (2,1,3) = e_3$
$(1,3,2) \circ (3,2,1) = (2,3,1) = e_4$

$(2,1,3) \circ (1,2,3) = (2,1,3) = e_3$
$(2,1,3) \circ (1,3,2) = (2,3,1) = e_4$
$(2,1,3) \circ (2,1,3) = (1,2,3) = e_1$
$(2,1,3) \circ (2,3,1) = (1,3,2) = e_2$
$(2,1,3) \circ (3,1,2) = (3,2,1) = e_6$
$(2,1,3) \circ (3,2,1) = (3,1,2) = e_5$

$(2,3,1) \circ (1,2,3) = (2,3,1) = e_4$
$(2,3,1) \circ (1,3,2) = (2,1,3) = e_3$
$(2,3,1) \circ (2,1,3) = (3,2,1) = e_6$
$(2,3,1) \circ (2,3,1) = (3,1,2) = e_5$
$(2,3,1) \circ (3,1,2) = (1,2,3) = e_1$
$(2,3,1) \circ (3,2,1) = (1,3,2) = e_2$

$(3,1,2) \circ (1,2,3) = (3,1,2) = e_5$
$(3,1,2) \circ (1,3,2) = (3,2,1) = e_6$
$(3,1,2) \circ (2,1,3) = (1,3,2) = e_2$
$(3,1,2) \circ (2,3,1) = (1,2,3) = e_1$
$(3,1,2) \circ (3,1,2) = (2,3,1) = e_4$
$(3,1,2) \circ (3,2,1) = (2,1,3) = e_3$

$(3,2,1) \circ (1,2,3) = (3,2,1) = e_6$
$(3,2,1) \circ (1,3,2) = (3,1,2) = e_5$
$(3,2,1) \circ (2,1,3) = (2,3,1) = e_4$
$(3,2,1) \circ (2,3,1) = (2,1,3) = e_3$
$(3,2,1) \circ (3,1,2) = (1,3,2) = e_2$
$(3,2,1) \circ (3,2,1) = (1,2,3) = e_1$

Tabelle mit Verknüpfungsergebnissen:

$\circ$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_2	e_2	e_1	e_5	e_6	e_3	e_4
e_3	e_3	e_4	e_1	e_2	e_6	e_5
e_4	e_4	e_3	e_6	e_5	e_1	e_2
e_5	e_5	e_6	e_2	e_1	e_4	e_3
e_6	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

4

4.a

4.a.1

$G := \{(x,y) | x,y \in \mathbf{R}, x^2+y^2=1\}$
z.Z.:
$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G \Rightarrow (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in G$

$$\begin{aligned}
(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in G \quad &\Rightarrow \quad (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (x_1x_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2 + (x_1y_2)^2 + 2x_1y_2x_2y_1 + (x_2y_1)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2x_2^2 - \underline{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + \underline{2x_1x_2y_1y_2} + x_2^2y_1^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(y_2^2 + x_2^2) = 1 \\
\text{da } (x_2,y_2) \in G \quad &\Leftrightarrow \quad x_1^2 \cdot 1 + y_1^2 \cdot 1 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = 1 \\
\text{da } (x_1,y_1) \in G \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ((x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G \Rightarrow (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in G)$$

4.a.2

Gesucht: neutrales Element der Gruppe
Eigenschaft des neutralen Elements:
$x \cdot n = n \cdot x = x$
Gesucht also $(x_n, y_n) \in G$ für das gilt:
$(x,y) \cdot (x_n, y_n) = (x,y)$

$$\begin{aligned}
(x,y) \cdot (x_n,y_n) &= (x,y) \\
\Leftrightarrow \quad (xx_n - yy_n, xy_n + yx_n) &= (x,y)
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich zwei Gleichungen:

$$xx_n - yy_n = x \tag{2}$$
$$xy_n + yx_n = y \tag{3}$$

Auflösen der ersten Gleichung:

$$\begin{array}{lll} & xx_n - yy_n = x & \mid +yy_n \\ \Leftrightarrow & xx_n = x + yy_n & \mid : x \\ \Leftrightarrow & x_n = \frac{x + yy_n}{x} & \\ \Leftrightarrow & x_n = \frac{x}{x} + \frac{yy_n}{x} & \\ \Leftrightarrow & x_n = 1 + \frac{yy_n}{x} & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\begin{array}{lll} & xy_n + yx_n = y & \\ \Leftrightarrow & xy_n + y \cdot (1 + \frac{yy_n}{x}) = y & \\ \Leftrightarrow & xy_n + y + \frac{y^2 y_n}{x} = y & \mid -y \\ \Leftrightarrow & xy_n + \frac{y^2 y_n}{x} = 0 & \\ \Leftrightarrow & y_n \cdot (x + \frac{y^2}{x}) = 0 & \end{array}$$

Da x und y beliebig sein sollen muß $y_n = 0$ sein.
Einsetzen in die erste Gleichung:

$$\begin{array}{ll} & x_n = 1 + \frac{yy_n}{x} \\ \Leftrightarrow & x_n = 1 + \frac{y \cdot 0}{x} \\ \Leftrightarrow & x_n = 1 + 0 \\ \Leftrightarrow & x_n = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x_n, y_n) = (1, 0)$$

Proben:

$$\begin{aligned} (x,y) \cdot (1,0) &= (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) \\ &= (x - 0, 0 + y) \\ &= (x, y) \\ (1,0) \cdot (x,y) &= (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + 0 \cdot x) \\ &= (x - 0, y + 0) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

$(1,0) \in G$, da $1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$

$$\Rightarrow (1,0) \text{ ist neutrales Element der Gruppe } G$$

4.a.3

Gesucht: Inverse (x_i, y_i) von $(x, y) \in G$
Nach Definition muß dafür gelten:

$$\begin{array}{lll} & (x,y) \cdot (x_i, y_i) & = (1,0) \\ \Leftrightarrow & (xx_i - yy_i, xy_i + yx_i) & = (1,0) \end{array}$$

Ergibt wiederum zwei Gleichungen:

$$xx_i - yy_i = 1 \tag{4}$$
$$xy_i + yx_i = 0 \tag{5}$$

Auflösen der ersten Gleichung:

$$\begin{array}{lll} & xx_i - yy_i = 1 & \mid -xx_i \\ \Leftrightarrow & -yy_i = 1 - xx_i & \mid : -y \\ \Leftrightarrow & y_i = -\frac{1 - xx_i}{y} & \end{array}$$

Auflösen der zweiten Gleichung:

$$\begin{array}{lll} & xy_i + yx_i = 0 & \mid -yx_i \\ \Leftrightarrow & xy_i = -yx_i & \mid : x \\ \Leftrightarrow & y_i = -\frac{yx_i}{x} & \end{array}$$

Mit den beiden Ergenissen für y_i kann eine Gleichung aufgestellt werden:

$$\begin{array}{lll} & -\frac{1 - xx_i}{y} = -\frac{yx_i}{x} & \mid \cdot(-1) \\ \Leftrightarrow & \frac{1 - xx_i}{y} = \frac{yx_i}{x} & \mid \text{Erweitern} \\ \Leftrightarrow & \frac{(1 - xx_i)x}{xy} = \frac{(yx_i)y}{xy} & \\ \Leftrightarrow & \frac{x - x^2 x_i}{xy} = \frac{y^2 x_i}{xy} & \mid -\frac{y^2 x_i}{xy} \\ \Leftrightarrow & \frac{x - x^2 x_i - y^2 x_i}{xy} = 0 & \end{array}$$

Da wiederum (x, y) beliebig ist, muß der Zähler 0 sein.

$$\begin{aligned}
& x - x^2x_i - y^2x_i &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x - x_i(x^2+y^2) &&= 0 && \mid \text{Da } (x,y) \in G \\
\Leftrightarrow\quad & x - x_i \cdot 1 &&= 0 && \mid +x_i \\
\Leftrightarrow\quad & x &&= x_i
\end{aligned}$$

Dies wird wieder in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
& y_i &&= -\frac{yx_i}{x} \\
\Leftrightarrow\quad & y_i &&= -\frac{yx}{x} \\
\Leftrightarrow\quad & y_i &&= -y
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Das inverse Element zu (x,y) ist $(x,-y)$