Aufgabenblatt 7

Lösungsvorschläge

1

Es gelten

$$\forall a,b,c \in \mathbf{R}: \qquad a \leq b \Rightarrow (a+c) \leq (b+c) \tag{1}$$
$$\forall a,b,c \in \mathbf{R}: \qquad a \leq b \wedge c \geq 0) \Rightarrow (ac) \leq (bc) \tag{2}$$

Lemma 1 $a < b \Rightarrow a+c < b+c$.

Beweis: $a < b \Rightarrow a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$. *Noch z.z.* $a+c \neq b+c$:

$$\begin{array}{rrcll} \textit{Annahme:} & a+c & = & b+c & \quad |+(-c) \\ \Rightarrow & a+c+(-c) & = & b+c+(-c) & \\ \Rightarrow & a & = & b & \quad \textit{Widerspruch zu } a<b \end{array}$$

1.a

Vorausgesetzt werden (v1) $0 < x$ und (v2) $x < y$.

Zu zeigen ist, dass daraus (k1) $0 < \frac{1}{x}$ und (k2) $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ folgen.

Beweis von (k1) durch Widerspruch

$$\begin{array}{rrcll} \text{Annahme: } 0 < x \Rightarrow & \frac{1}{x} & \leq & 0 & |\cdot x \cdot x,\ (2) \text{ mit } x>0 \text{ (v1)} \\ \Rightarrow & x & \leq & 0 & \text{Widerspruch zu (v1)} \end{array}$$

Beweis von (k2) indirekt

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{1}{x} & \leq & \frac{1}{y} & |\cdot x,\ x>0 \text{ (v1)} \\ \Rightarrow & 1 = \frac{x}{x} & \leq & \frac{1}{y} = \frac{x}{y} & |\cdot y,\ y>0 \text{ (v1, v2)} \\ \Rightarrow & 1 \cdot y & \leq & \frac{x}{y} \cdot y & \\ \Rightarrow & y & \leq & x & \end{array}$$

1.b

Z.z. $\forall x \in \mathbf{R}: \quad x^2 \geq 0$.

Fall 1: $x \geq 0$

$$\begin{array}{rrcll} & 0 & \leq & x & |\cdot x,\ x>0 \\ \Rightarrow & 0 & \leq & x \cdot x = x^2 & \end{array}$$

Fall 2: $x < 0$

$$\begin{array}{rrcll} & x & < & 0 & |+(-x) \text{ nach Lemma 1, } (-x)>0 \\ \stackrel{L1}{\Longrightarrow} & x+(-x) & < & 0+(-x) & \\ \stackrel{Fall1}{\Longrightarrow} & 0 & < & (-x)^2 = x^2 & \end{array}$$

1.c

Behauptung: $\forall x \in \mathbf{R}: \quad x \geq -1 \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N}: \ (1+x)^n \geq 1 + nx)$.

Beweis durch vollständige Induktion:

IA: $n = 1$: $\qquad (1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$

IV: Behauptung gilt für n.

IS: Z.z. IV $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbf{R}: \ x \geq -1 \Rightarrow (n \in \mathbf{N}: \ (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x)$

$$\begin{array}{rcll} (1+x)^{n+1} & = & (1+x)^n \cdot (1+x) & \\ & \geq & (1+nx) \cdot (1+x) & |\text{nach IV und (1) mit } (1+x) \geq 0 \text{ nach Vorauss.} \\ & = & 1 + nx + x + nx^2 & \\ & \geq & 1 + nx + x & |nx^2 \geq 0 \text{ nach (1.b)} \\ & = & 1 + (n+1)x & \end{array}$$

1.d

Z.z. $\forall q \in \mathbf{R}: \quad 0 \leq q < 1 \Rightarrow (q^n)_{n \in \mathbf{N}}$ besitzt den Grenzwert 0.

Sei ein solches q gegeben. Dann ist $\frac{1}{q} > 1$, also kann man auch schreiben: $\frac{1}{q} = (1 + A)$ mit $A > 0$, also mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung (1.c): $\frac{1}{q^n} \geq 1 + nA \overset{(1.a)}{\Rightarrow} q^n \leq \frac{1}{1+nA} < \frac{1}{nA}$.

Gibt man sich nun $\varepsilon > 0$ vor, so findet man laut Archimedischem Axiom ein $n_0 \in \mathbf{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{A\varepsilon}$, also $\frac{1}{n_0 A} \leq \varepsilon$. Jetzt gilt offenbar

$$\forall n \geq n_0 : |q^n - 0| = q^n < \frac{1}{An} \overset{(1.a)}{\leq} \frac{1}{An_0} \leq \varepsilon$$

Genau dies war aber zu zeigen.

1.e

Behauptung: $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \ \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, \ n \geq n_0 : \ |\frac{1}{n}| < \varepsilon$.

Gemäß Archimedischem Axiom gilt: $\forall a \in \mathbf{R} \ , \ a > 0 \ \exists n \in \mathbf{N}: \ n \geq \frac{1}{a} \overset{(2)}{\Longrightarrow} n \cdot a \geq 1 \overset{(2),(1.a)}{\Longrightarrow} a \geq \frac{1}{n}$

Mit $a = \varepsilon$ erhalten wir

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R} \ , \ \varepsilon > 0 \ \exists n' \in \mathbf{N}: \ \frac{1}{n'} = \left| \frac{1}{n'} \right| \leq \varepsilon$$

Wähle $n_0 = n' + 1$. Ferner gilt nach (1.a) $\frac{1}{n_0} = \frac{1}{n'+1} < \frac{1}{n'}$, wegen $n' > 0$ auch $|\frac{1}{n_0}| < |\frac{1}{n'}|$. Mit $|\frac{1}{n'}| \leq \varepsilon$ folgt $|\frac{1}{n_0}| < \varepsilon$. Also

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R} \ , \ \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N}: \ \left| \frac{1}{n_0} \right| < \varepsilon$$

Beweis $\forall n \in \mathbf{N}, \ n \geq n_0$ durch vollständige Induktion.

IA: $n = n_0$. Bereits bewiesen.

IV: Behauptung gilt für n.

IS: Z.z. IV $\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n+1 \geq n_0 :\ |\frac{1}{n+1}| < \varepsilon$

$$\begin{array}{rrcll} & |\frac{1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} & < & \frac{1}{n} & |\text{wegen } n+1 > n, \text{umgeformt nach (1.a)} \\ & & = & |\frac{1}{n}| < \varepsilon & |\text{nach IV} \\ \Rightarrow & |\frac{1}{n+1}| & < & \varepsilon & \end{array}$$

1.f

Z.z. ist $\forall x, y \in \mathbf{R} :\ ||x| - |y|| \leq |x+y|$. Gemäß der Definition für den Absolutbetrag durch $|x| := \begin{cases} x, \text{falls } x \geq 0 \\ -x \text{ sonst} \end{cases}$ gilt dies genau dann wenn

1. $\forall x, y \in \mathbf{R} :\ |x| - |y| \leq |x+y|$ und
2. $\forall x, y \in \mathbf{R} :\ -(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |x+y|$

Es gilt bereits $\forall a, b \in \mathbf{R} :\ |a+b| \leq |a| + |b|$.
Mit $a = (x+y)$ und $b = -y$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} |x| = |(x+y) + (-y)| & \leq & |x+y| + |-y| & \text{mit } |-y| = |y| \\ |x| - |y| & \leq & |x+y| & \end{array}$$

Mit $a = (x+y)$ und $b = -x$ erhalten wir ebenso

$$\begin{array}{rcl} |y| = |(x+y) + (-x)| & \leq & |x+y| + |-x| \\ |y| - |x| & \leq & |x+y| \end{array}$$

2

Eine Metrik ist eine Abbildung $d : M \times M \Rightarrow \mathbf{R}_+$ mit den Eigenschaften

1. $\forall x, y \in M :\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x = y)$
2. $\forall x, y \in M :\ d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall x, y, z \in M :\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

2.a

Z.z. ist, dass $d(x,y) := \begin{cases} 0, \text{wenn } x = y \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$ eine Metrik ist.
Beweis der einzelnen Eigenschaften:

1. $d(x,y) = 0 \overset{Def.}{\Rightarrow} x = y$
   $x = y \overset{Def.}{\Rightarrow} d(x,y) = 0$
2. **Fall 1:** $x = y$: $d(x,y) = d(x,x) = d(y,x)$

Fall 2: $x \neq y$: $\left.\begin{array}{l} d(x,y) = 1 \\ d(y,x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

3. Es gibt fünf mögliche Fälle für x, y und z:

   (a) $x = z = y$
   (b) $x = z \neq y$
   (c) $x = y \neq z$
   (d) $x \neq y = z$
   (e) $x \neq y \neq z \neq x$

   Betrachtung der Fälle a und b: $d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$
   korrekt, weil $d(x,y),\ d(y,z) \in \{0,1\}$.
   Betrachtung der Fälle c bis e: $d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z)$
   Beweis durch Widerspruch:

$$\begin{array}{rr} \text{Annahme:} & 1 > d(x,y) + d(y,z) \\ \Rightarrow & d(x,y) + d(y,z) = 0 \\ \Rightarrow & d(x,y) = 0 \ \wedge\ d(y,z) = 0 \\ \Rightarrow & x = y \ \wedge\ y = z \\ \Rightarrow & x = y = z \end{array}$$

   $x = y = z$ ist aber Fall a, also führt die Annahme in den Fällen c bis e zu einem Widerspruch.

2.b

Lemma 2 $-1 < a \leq b \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$

Beweis:

$$\begin{array}{rrcll} & a & \leq & b & \mid +ab,\ (1) \\ \Rightarrow & a + ab & \leq & b + ab & \\ \Rightarrow & a \cdot (1+b) & \leq & b \cdot (1+a) & \mid \cdot \frac{1}{1+b},\ \textit{(2) mit } (1+b) > 0 \\ \Rightarrow & a & \leq & b \cdot \frac{1+a}{1+b} & \mid \cdot \frac{1}{1+a} \\ \Rightarrow & \frac{a}{1+a} & \leq & \frac{b}{1+b} & \end{array}$$

Z.z. ist, dass $d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ eine Metrik ist, wenn bereits $d(x,y)$ eine Metrik ist.
Beweis der einzelnen Eigenschaften:

1. $(x = y) \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{0}{1+0} = 0$

   $d'(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0$ weil ein Bruch nur dann 0 ist, wenn der Zähler 0 ist $\Rightarrow (x = y)$

2. $d(x,y) = d(y,x) \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} \Rightarrow d'(x,y) = d'(y,x)$

3.

$$\begin{array}{rrcll} & d(x,z) & \leq & d(x,y) + d(y,z) & \mid \text{Lemma 2} \\ \Rightarrow & \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} & \leq & \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} & \\ & & = & \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} & \mid \text{mit (1.a) und } d(x,y) \geq 0 \\ & & & & \Rightarrow (1 + d(x,y) + d(y,z)) \geq (1 + d(y,z)) \\ & & \leq & \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} & \\ & & = & d'(x,y) + d'(y,z) & \end{array}$$