Mathematische Grundlagen der Informatik II, SS 2002
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1.

Betrachten Sie die Menge der rationalen Zahlen mit der natürlichen euklidischen Metrik und zeigen Sie, dass dieser Raum nicht zusammenhängend ist. (Hinweis: Aufgabe ist leicht!)

Aufgabe 2.

Anwendung des Zwischenwertsatzes zur Nullstellenbestimmung:
Betrachten Sie die durch das Polynom $x^5 + 3x^2 + x + 1$ gegebene stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Finden Sie Punkte $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) < 0,\ f(y_0) > 0$ und bestimmen Sie durch fortgesetzte Halbierung dieses Intervalls – wie in der Vorlesung beschrieben – eine Nullstelle von *f* mit einer Genauigkeit von 10^{-6} (d.h. Sie brechen den Algorithmus ab, wenn das Intervall diese Länge unterschreitet.)

Aufgabe 3.

Wir wissen, dass für $q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1$ die Folge $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ konvergiert. Den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1}{1-q}$ der Folge der Partialsummen bezeichnen wir auch mit $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ und nennen einen derartigen Ausdruck eine „unendliche Reihe“ und speziell obiges Beispiel die „geometrische Reihe“.

Ist $(a_i)_{i\in N}$ eine Folge, so bezeichnet man mit dem Ausdruck $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ sowohl die Reihe selbst, also die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$, wie auch ggf. deren Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i$.
Durch Vergleich mit der geometrischen Reihe gewinnt man folgendes Konvergenzkriterium:

Quotientenkriterium: Ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ eine Reihe mit komplexen Summanden und gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, so besitzt die Reihe einen Grenzwert. Ist dagegen $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, so besitzt die Reihe keinen Grenzwert.

a) Man zeige nun mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ kann man mit Hilfe des Quotientenkriteriums herausfinden, ob die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ konvergiert bzw. divergiert? Für welche Teilmenge der komplexen Zahlen erhält man keine Aussage?

Aufgabe 4*.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie einen reellen Eigenwert dieser Matrix und den zugehörigen Eigenvektor. (Was fällt auf? Können Sie das verallgemeinern?)

b) Berechnen Sie $\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$, indem Sie rekursiv so die Matrix $B_{10} = \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{i!} A^i$ bestimmen: $B_0 := E_3$, $B_1 := \left(\frac{1}{10} A\right) B_0 + E_3$, $B_2 := \left(\frac{1}{9} A\right) B_1 + E_3$, $\ldots$, $B_{10} := \left(\frac{1}{1} A\right) B_9 + E_3$.

c) zeigen Sie, dass B_{10} angenähert eine Rotationsmatrix ist und denselben reellen Eigenvektor wie A besitzt.