# Mathematische Grundlagen der Informatik II, SS 2002
# Aufgabenblatt 3

**Aufgabe 1**.

Sei $M_{m\times n}(K)$ die Menge der Matrizen mit *m* Zeilen und *n* Spalten und Koeffizienten in $K$.
Das Matrizenprodukt ist eine Abbildung $M_{m\times n}(K)\times M_{n\times l}(K)\to M_{m\times l}(K)$.
Man berechne für $K=\mathbb{Z}_5$ das Produkt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2**

a) Zeigen Sie: die durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gegebene Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$ ist ein Vektorraumhomorphismus. Zeigen Sie auch, dass $\varphi(e_i)=\begin{pmatrix} a_{1\,i} \\ \vdots \\ a_{m\,i} \end{pmatrix}$.

b) Der Homomorphismus $\varphi : {\mathbb{Z}_2}^4 \to {\mathbb{Z}_2}^3$ sei gegeben durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass diese Abbildung nicht injektiv ist. Finden Sie ein von Null verschiedenes Element $x\in\ker(\varphi)$.

**Aufgabe 3**

a) Seien $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}\in {\mathbb{Z}_2}^n$ gegeben. Definiere rekursiv $x_{n+m} := \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+m}$. Durch welche Matrix wird der Homomorphismus $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ beschrieben?

b)* Für $n$=5 bestimme man durch Probieren (oder für $n$=8 durch ein geeignetes Programm) $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ so, dass die Folge $(x_i)$ eine möglichst lange Periode erhält. (Hinweis: die Periode ist die kleinste Zahl $N$, so dass $x_{N+i} = x_i$; es ist jedenfalls $N \leq 2^n - 1$. (Wieso?))

Zusatzaufgabe: Für $n$=128 wähle man $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2{}^n$ zufällig, nummeriere die Pixel eines Computerbildschirms durch und färbe Pixel$_i$ schwarz, wenn $x_i = 1$, weiß sonst. Erkennen Sie Muster in dem entstehenden Bild?