Mathematische Grundlagen der Informatik II, SS 2002
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1.

a) Man berechne das Vektorprodukt $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b*) In der Vorlesung wurde das „äußere Produkt“ $v \wedge w \in \Lambda^2 V$ eingeführt. Nach denselben Regeln kann man auch das äußere Produkt dreier Vektoren berechnen, d.h. die Abbildung $(u, v, w) \to u \wedge v \wedge w$ ist linear in jeder Komponente und antisymmetrisch bei der Vertauschung zweier Komponenten. Sind drei Vektoren linear abhängig, so ist ihr äußeres Produkt 0.
Man stelle auf diese Weise fest, dass die Vektoren $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, $v = 2e_1 + e_2 + 2e_3 + 5e_4$, $w = -e_1 + 4e_2 + 5e_3 + 2e_4$ linear abhängig sind.
(Hinweis: Das Produkt $u \wedge v \wedge w$ ist eine Linearkombination der Basiselemente $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$, $e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, deren Koeffizienten man ausrechnen muß, und die in diesem Fall alle 0 sein müssen.)

Aufgabe 2.

Man betrachte den Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, sowie $U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| < x, v >= 0 \right\}$, den Unterraum (Ebene durch 0) der auf *v* senkrecht stehenden Vektoren. Man finde nun zunächst eine Basis dieses Unterraums, daraus mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von *U* und ergänze diese durch Normierung des Vektors *v* auf die Länge 1 zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Die aus den drei Orthonormalbasisvektoren gebildete Matrix sei die Rotationsmatrix *B*, in deren dritter Spalte also der Einheitsvektor steht, der in die Richtung der durch den ursprünglich vorgegebenen Vektor *v* gegebene Achse zeigt. Man berechne nun die Matrix

$$R_\varphi := B \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^t$$

die, wie in der Vorlesung demonstriert, eine Drehung um den Winkel φ um die erwähnte Achse darstellt. Dabei muß natürlich der Vektor *v* unverändert bleiben, man zeige daher noch zur Probe $R_\varphi v = v$.