Begriffe und Aussagen zur Differentialrechnung

Ganz allgemein möchte man gekrümmte Objekte durch lineare Objekte approximieren. Dies bedeutet im einfachsten Fall, dass man eine Tangente an eine Kurve oder eine Tangentialebene an eine Fläche im dreidimensionalen Raum konstruieren muß.

Behandeln wir zunächst den Fall einer Kurve im $\mathbb{R}^2$, die als Graph einer Abbildung $f: I \to \mathbb{R}$ gegeben ist, $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sind $x, x_0 \in I$ zwei verschiedene Punkte, so nennen wir $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ***Differenzenquotient***. Dabei handelt es sich offenbar um die Steigung der Geraden, die durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$ des Graphen von f verläuft. Es gibt eine Tangente, wenn der Grenzwert[1] der Differenzenquotienten existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Die Zahl $f'(x_0)$ heißt ***Ableitung*** von f in x_0 und ist die Steigung der Tangente durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen von f. Existiert die Ableitung, so heißt f ***differenzierbar*** in x_0. Man zeigt leicht, dass aus der Differenzierbarkeit in x_0 die Stetigkeit folgt.

f ist offenbar genau dann differenzierbar in x_0 (siehe in Fußnote 1), wenn
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I:\ |x - x_0| < \delta \ \to\ |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0| < \varepsilon |x - x_0|$.
Diese Formulierung bietet sich sofort an zur Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs für Abbildungen zwischen höherdimensionalen Räumen:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $x_0 \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heißt ***differenzierbar*** in x_0, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so daß gilt:
(*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U:\ \|x - x_0\| < \delta \ \to\ \|f(x) - f(x_0) - \varphi(x - x_0\| < \varepsilon \|x - x_0\|$.
Dies bedeutet, dass f in x_0 durch diese lineare Abbildung besonders gut approximiert wird. Man zeigt leicht, dass es höchstens eine solche lineare Abbildung geben kann. Diese lineare Abbildung – oder auch ihre Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basen auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ – heißt dann ebenfalls ***Ableitung*** von f in x_0 und erhält den Namen $Df(x_0)$.
Im eindimensionalen Fall ist also $Df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$: $Df(x_0)$ wird also dann durch eine 1x1-Matrix mit dem Koeffizienten $f'(x_0)$ beschrieben, die lineare Abbildung $Df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Zahl $f'(x_0)$ transportieren dieselbe Information.

Schließlich nennt man eine Abbildung ***differenzierbar***, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist.

---

[1] Ist $g: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $a \in \mathbb{R}$, so schreibt man $a = \lim_{x \to x_0} g(x)$, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I:\ |x - x_0| < \delta \ \to\ |g(x) - a| < \varepsilon$. Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede Folge (x_n) in I gilt: $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = a$. Erinnert man sich an die ε, δ - Definition der Stetigkeit, so gilt offenbar $g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$ genau dann, wenn g stetig in x_0 ist.

Offenbar gilt für eine Abbildung der Form $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$**:**

$$f'(x):=\lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x}}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x}}\frac{ay+b-(ax+b)}{y-x}=\lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x}}\frac{a(y-x)}{y-x}=a\,.$$

Das höherdimensionale Analogon ist eine ***affine Abbildung*** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\ f(x)=Ax+b$. Dabei ist A linear, dargestellt durch eine *nxm*-Matrix, $b\in\mathbb{R}^n$. Um nun zu zeigen, dass $\forall x_0\in\mathbb{R}^n:\ Df(x_0)=A$, muß die Abschätzung (*) überprüft werden. Man erhält sofort: $\forall x\in\mathbb{R}^n:\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|=\|A(x)+b-(Ax_0+b)-A(x-x_0)\|=0<\varepsilon\|x-x_0\|$. Wir wissen nun also, dass affine Abbildungen differenzierbar sind und auch, wie ihre Ableitung aussieht.

Partielle Ableitungen

Ist $f:U\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0\in U$, so betrachten wir die Einschränkung von *f* auf Geraden durch x_0 in Richtung der kanonischen Basisvektoren. Dazu setzen wir $g_i(t):=f(x_0+te_i)$. Mit den g_i können wir einfach rechnen, da sie ja nur noch einen eindimensionalen Definitionsbereich haben. Wir zeigen später – wenn wir die Kettenregel kennen – dass aus der Differenzierbarkeit von *f* in x_0 die Differenzierbarkeit der g_i in 0 folgt. Man setzt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0):=g'(0)$$

und nennt diese Zahl die ***i-te partielle Ableitung*** von *f* in x_0. Wir zeigen später, daß

$$Df(x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\right),$$

d.h. die Koeffizienten der 1*xn*-Matrix, welche die Ableitung darstellt, sind gerade die partiellen Ableitungen. Ist jetzt $f:U\to\mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit einem höherdimensionalen Bildraum, so setzt sie sich zusammen aus ihren Komponentenfunktionen, d.h. $f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$, und aus der Differenzierbarkeit von *f* in x_0 folgt die Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ und es gilt

$$Df(x_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)\end{pmatrix}$$

Oft findet man die Ableitung $Df(x_0)$ am einfachsten dadurch, daß man die partiellen Ableitungen berechnet.

Nach diesem Überblick werden wir die wichtigsten Differentiationsregeln entwickeln, die es uns erlauben, die Ableitungen einer großen Klasse von Abbildungen zu berechnen..

Wird fortgesetzt.