Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1.

Mit Hilfe der Umkehrfunktionsregel haben wir gezeigt, dass $\left(\arctan\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Dieser Ausdruck lässt sich leicht in eine Potenzreihe entwickeln (geometrische Reihe!) und damit findet man durch gliedweise Integration eine Potenzreihe für die Funktion arctan selbst.

Man begründe geometrisch, dass $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{12}$ und benutze diese Potenzreihe bzw. die Taylorformel mit Lagrange Restglied, um π mit einem Fehler unterhalb 10^{-6} zu berechnen.

Aufgabe 2.

a) Man berechne mit Hilfe der Substitutionsregel $\int_0^{\pi} \cos(x^4)dx$.

b*) Man berechne $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^2\theta \, d\theta$ mit Hilfe der Substitutionsregel und der Substitution $\varphi:[0,1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta = \varphi(x) = 2\arctan x$. Dabei nutze man aus, dass

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \text{ und}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^{-1} = \left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}$$

Man kann also $\cos\theta$ durch x ausdrücken, und $\sin\theta$ auf ähnliche Weise ebenso. Die Substitutionsregel $\int_0^{\pi/2} f(\theta)d\theta = \int_0^1 f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ verwandelt dann unser Integral mit den trigonometrischen Ausdrücken in eines mit nur rationalen Ausdrücken, welches wir alsdann berechnen können.

Aufgabe 3.

Man setze $\mathfrak{M}_\varepsilon := \left\{[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon] \times [m\varepsilon, (m+1)\varepsilon] \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z}\right\}$. Jedes $Q \in \mathfrak{M}_\varepsilon$ ist also ein Quadrat mit Kantenlänge ε. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte abgeschlossene Menge, $f: G \to \mathbb{R}$, so heißt f Riemann-integrierbar, wenn

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\substack{Q \in \mathfrak{M}_\varepsilon \\ G \cap Q \neq \emptyset}} \varepsilon^2 \sup_{q \in Q} f(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\substack{Q \in \mathfrak{M}_\varepsilon \\ G \cap Q \neq \emptyset}} \varepsilon^2 \inf_{q \in Q} f(q)$$

Diesen Grenzwert nennen wir dann $\iint_G f(x,y)\,dxdy$ und man zeigt, dass insbesondere stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind.

Ist G der Einheitskreis, so ist offenbar mit $f \equiv 1$ $\iint_G dxdy$ der Flächeninhalt von G.
Man schreibe ein Computerprogramm, welches für $\varepsilon = 10^{-3}$ die Summe $\sum_{\substack{Q \in \mathfrak{M}_\varepsilon \\ G \cap Q \neq \emptyset}} \varepsilon^2$ berechnet.

Aufgabe 4.

Man berechne noch einmal den Flächeninhalt des Einheitskreises, diesmal durch die Rechnung $\iint_G dxdy = \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$. (Zur Berechnung des äußeren Integrals: Substitution!)